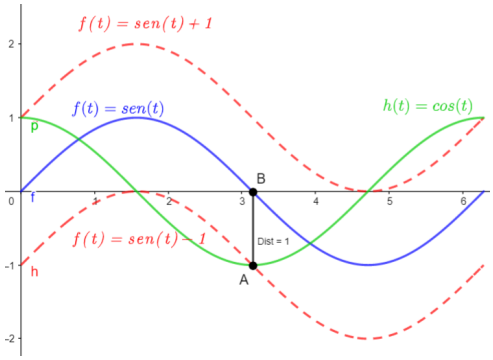
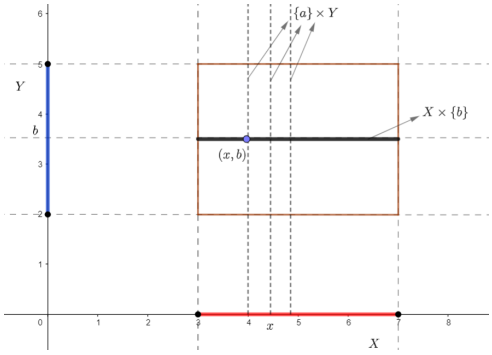
Trabalho Final de Licenciatura
Elementos de Topologia e Análise Funcional com Aplicações

Ano letivo 2020/2021
Área Departamental de Matemática
Instituto Superior de Engenharia de Lisboa





Tiago Rodrigues

Licenciatura em Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa

Orientadores:
Professor Filipe Cal
Professora Isabel Coelho

Setembro de 2021

Conteúdo

Agradecimentos . . . 3
Resumo . . . 5
Abstract . . . 8

1 Introdução **11**
1.1 Teoria de conjuntos . . . 11
1.2 Relações binárias . . . 15
1.3 Aplicações . . . 20

2 Espaços Topológicos e Funções Contínuas **23**
2.1 Topologia . . . 23
2.2 Base topológica . . . 29
2.3 Topologia produto de $X \times Y$ . . . 31
2.4 Topologia induzida ou topologia de subespaço . . . 32
2.5 Interior, exterior, fronteira e aderência . . . 34
2.6 Funções contínuas . . . 36

3 Espaços Métricos **41**
3.1 Métrica . . . 41
3.2 Topologia de um espaço métrico . . . 44
3.3 Sucessões e continuidade . . . 50
3.4 Espaços métricos completos . . . 54

4 Espaços Conexos **59**
4.1 Espaços conexos . . . 59
4.2 Espaços conexos por arcos . . . 70

5 Espaços Compactos **77**
5.1 Espaços compactos . . . 77

6 Espaços Vetoriais e Espaços Normados **95**
6.1 Espaços vetoriais . . . 95
6.2 Espaços normados . . . 98
6.3 Espaços normados de dimensão finita . . . 102
6.4 Operadores linerares . . . 104
6.5 Funcionais lineares . . . 108

Bibliografia **111**

Agradecimentos

Começo por agradecer aos professores orientadores deste projeto, ao professor Filipe Cal e à professora Isabel Coelho, pois foram incansáveis durante estes 12 meses de trabalho. Agradeço todas as horas extra em explicações de exercícios e matéria lecionada, além das reuniões semanais de duração de 3 horas em modelo de ensino presencial e das posteriores 6 horas semanais em regime online (digital). Também tenho de agradecer pela motivação, pelo empenho para que eu percebesse tudo o que era dito, pela energia positiva que passavam independentemente se fosse uma reunião online ou presencial e especialmente pelo facto de disponibilizarem o seu tempo de férias (mês de Agosto/Verão) para ficarmos cerca de 2 a 3 horas a esclarecer dúvidas sobre o relatório e os exercícios.
Aproveito também para agradecer à professora Lucía Suárez pelas notas no relatório preliminar enviado em Janeiro e pela disponibilidade para a leitura do relatório. Agradeço à Catarina Teixeira, psicóloga do ISEL, por me ter ajudado bastante na minha luta interior, por nunca ter desistido de mim e por me ter ouvido e apoiado nas coisas mais insignificantes e significantes.

Passando agora para as pessoas mais próximas, tenho de começar por agradecer à minha mãe, ao meu pai, à minha avó e ao Carlos, por facilitarem a minha vida, aliviarem as minhas preocupações, por estarem sempre prontos para me ajudar quando mais preciso deles e pelo seu amor incondicional.
Também tenho de agradecer a uma amiga especial, Maria Ribeiro, por me ter ajudado neste momento mais stressante e por ver as coisas de forma diferente, e agradeço à sua família por me ter deixado passar um tempo em sua casa para ter um ambiente de estudo mais favorável.
Por fim, e não menos importante, agradeço aos meus amigos nomeadamente: Xavier Dias (um amigo de longa data), Ricardo Melo, Alexandre Esteves, Inês Morais, Nuno Ribeiro, Jan Marxen, Tomás Malaca, Cristian Robu, Diogo Carvalho, Catarina Ferreira, Rafael Gonçalves, e João Pina (peço desculpa se me esqueci de alguém).

Resumo

Este relatório descreve o trabalho desenvolvido no projeto "Elementos de Topologia e Análise Funcional com Aplicações"e é constítuido por seis capítulos: introdução, espaços topológicos e funções contínuas, espaços métricos, espaços conexos, espaços compactos e espaços vetoriais e espaços normados.

Relativamente ao conteúdo dos capítulos, à medida que avançamos na matéria, vamos aperceber-nos das relações e ligações entre capítulos, uns mais do que outros.
As demonstrações de teoremas e proposições são exercícios propostos pelos professores ou por vezes são resultados/exemplos clássicos da Topologia e da Análise Funcional. Alguns destes exemplos desencadeiam proposições e teoremas seguintes, que tornam a leitura do relatório mais interessante.
Como nota, alguns exemplos e demonstrações podem ser consultadas nas referências bibliográficas sugeridas pelos professores Filipe Cal e Isabel Coelho.

A realizaçao deste trabalho permitiu também a consolidação das matérias estudadas ao longo do curso, nomeadamente: matemática discreta, análise e álgebra.

Palavras-chaves: Topologia, Análise funcional, Espaços topológicos, Funções, Sucessões, Continuidade, Espaço métricos, Espaços normados, Abertos, Espaços Conexos, Espaços Compactos.

Abstract

This report describes the work developed in the project "Elements of Topology and Functional Analysis with Applications"and consists of six chapters: introduction, topological spaces and continuous functions, metric spaces, connected spaces, compact spaces and vector spaces and normed spaces.

Regarding the content of the chapters, as we advance in the subject, we will understand the relationships and connections between chapters, some more than others.
Proofs of theorems and propositions are exercises proposed by teachers or sometimes are classic results/examples of topology and Functional Analysis. Some of these examples trigger following propositions and theorems, which make reading the report more interesting.
As a note, some examples and demonstrations can be consulted in the bibliographical references suggested by professors Filipe Cal and Isabel Coelho.

The accomplishment of this work allowed the consolidation of the subjects studied throughout the course, namely: discrete mathematics, analysis and algebra.

Keywords: Topological Spaces, Functions, Successions, Continuity, Metric Spaces, Normed Spaces, Open Spaces, Connected Spaces, Compact Spaces.

Tabela de Notação

Notação	Designação
∂X	Fronteira de X
π_X	Projeção canónica
Π_α	Produtório de α elementos
(X,d) ou X_d	Espaço métrico
$(B(X,Y),d)$	Espaço das funções limitadas.
$(C_B(X,Y),d)$	Espaço das funções limitadas e contínuas.
A'	cEonjunto derivado/ conjunto dos pontos de acumulação
$diam(Y)$	Diâmetro $= \sup_{x,y\in Y} d(x,y)$

Tabela 1: Tabela de Notação.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, vamos apenas mencionar conceitos básicos sobre conjuntos, as relações binárias e algumas aplicações.
Parecendo que não, este capítulo, embora muito introdutório, consegue ser bastante útil para rever e/ou consolidar algumas propriedades. Outro aspeto positivo, por exemplo, no estudo dos espaços topológicos, vamos depararmo-nos com alguns conceitos e propriedas estudas neste capítulo, facilitando, por sua vez, a compreensão das afirmações e demonstrações apresentadas nesse capítulo.

1.1 Teoria de conjuntos

Vamos trabalhar com conjuntos e os seus elementos e também como famílias ou coleções de conjuntos.
Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1. *Consideremos o conjunto* $X = \{b, \{a\}\}$.
Os elementos de X *são* b *e* $\{a\}$, *e* $\{a\}$ *não é um subconjunto de* X, *porque, como veremos mais à frente,* $\{a\} \notin \mathcal{P}(X)$.

Definição 1.2 (Partes de um conjunto)**.** *Designamos ainda por* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto constituído por todos os subconjuntos de* X, *ao qual chamamos conjunto das partes de* X.

Exemplo 1.3. *Consideremos o conjunto* X *do exemplo 1.1.*
O conjunto $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{b\}, \{\{a\}\}, \{b, \{a\}\}\}$.

Para resumir de um modo mais geral as definições mais importantes, foi criada a tabela 1.1 que vai conter o nome, a descrição e símbolos dessas definições.

Nome	Designação	Descrição
Inclusão	$X \subset Y$ ou $Y \supset X$	$\forall x:\ x \in X \implies x \in Y$
Igualdade	$X = Y$	$X \subset Y \wedge Y \subset X$
União	$X \cup Y$	$\forall x: \quad x \in X \vee x \in Y$
União de Conjuntos	$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$	$\forall x : \exists_{A \in \mathcal{A}} \quad x \in A$
Interseção	$X \cap Y$	$\forall x: \quad x \in X \wedge x \in Y$
Interseção de Conjuntos	$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$	$\forall x : \exists_{A \in \mathcal{A}} \quad x \in A$
Diferença	$X - Y$	$\forall x: \quad x \in X \wedge x \notin Y$

Tabela 1.1: Tabela com as definições mais gerais

Vamos agora recordar algumas propriedades da operações da tabela 1.1

Proposição 1.4. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então:*

(i) $X \cup Y = Y \cup X$

(ii) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

(iii) $X \subset X \cup Y$

(iv) $X \subset Y \iff X \cup Y = Y$

(v) $X \cup \emptyset = X$

Proposição 1.5. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então:*

(i) $X \cap Y = Y \cap X$

(ii) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

(iii) $X \cap Y \subset X$

(iv) $X \subset Y \iff X \cap Y = X$

(v) $X \cap \emptyset = \emptyset$

Demonstração.

ii) Tomemos três conjuntos arbitrários X, Y e Z.
Usando a definição de interseção, vamos mostrar que $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$:

$$\begin{aligned}(X \cap Y) \cap Z &= \{x : x \in (X \cap Y) \wedge x \in Z\} \\ &= \{x : x \in (x \in X \wedge x \in Y) \wedge x \in Z\} \\ &= \{x : x \in X \wedge x \in Y \wedge x \in Z\} \\ &= \{x : x \in X \wedge x \in (Y \cap Z)\} \\ &= X \cap (Y \cap Z)\end{aligned}$$

Podemos ainda usar a tabela 1.2 para confirmar o resultado obtido. Consideremos

$$\begin{cases} X = \{x : p(x)\} \\ Y = \{y : q(y)\} \\ Z = \{z : r(z)\} \end{cases},$$

vamos confirmar que $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Tabela 1.2: Tabela da verdade das conjunções com três proposições.

□

Facilmente se demonstram as seguintes propriedades referentes à definição anterior.

Proposição 1.6. *Sejam X, Y conjuntos arbitrários. Então:*

(i) $\emptyset \subset \mathcal{P}(X)$

(ii) $X \subset \mathcal{P}(X)$

(iii) $X \subset Y \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$

Proposição 1.7 (Leis de De Morgan)**.** *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então:*

(i) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

(ii) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Passemos para as propriedades referentes à diferença de conjuntos.

Proposição 1.8. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então:*

(i) $X - Y = \emptyset \Longleftrightarrow X \subset Y$

(ii) $X - Y = X \Longleftrightarrow X \cap Y = \emptyset$

(iii) $X - (X - Y) = X \cap Y$

(iv) $Y \subset X \Longleftrightarrow X - (X - Y) = Y$

(v) $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z)$

(vi) $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$

Outro tipo de conjuntos que teremos necessidade de saber mais adiante é a seguinte:

Definição 1.9 (Produto cartesiano). *Sejam X e Y conjuntos arbitrários. Chama-se produto cartesiano de X por Y e designa-se por $X \times Y$ o conjunto constituído pelos pares ordenados (x, y) em que a primeira coordenada x pertence ao conjunto X e a segunda coordenada y pertence ao conjunto Y, isto é,*

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Observemos a seguinte figura 1.1 para ser mais fácil a interpretação do produto cartesiano.

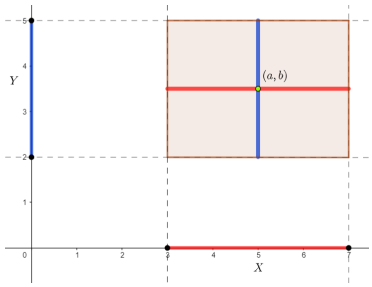


Figura 1.1: Produto cartesiano.

.

Proposição 1.10. *Sejam X, X_0, Y, Y_0 e Z conjuntos arbitrários. Então:*

(i) $\emptyset \times X = X \times \emptyset = \emptyset$

(ii) $X_0 \subset X \ \wedge \ Y_0 \subset Y \Longrightarrow X_0 \times Y_0 \subset X \times Y$

(iii) *se* $X_0 \neq \emptyset \ \wedge \ Y_0 \neq \emptyset$, *então* $\left(X_0 \times Y_0 \subset X \times Y \Longrightarrow X_0 \subset X \ \wedge \ Y_0 \subset Y\right)$

(iv) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$

(iv.a) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A) \times Z = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A \times Z)$

(v) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$

(v.a) $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A) \times Z = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A \times Z)$

Demonstração.

iv) Seja $(a, b) \in (X \cup Y) \times Z$, então:

$$\begin{aligned} a \in (X \cup Y) \wedge b \in Z &\Leftrightarrow (a \in X \vee a \in Y) \wedge b \in Z \\ &\Leftrightarrow (a \in X \wedge b \in Z) \vee (a \in Y \wedge b \in Z) \\ &\Leftrightarrow ((a, b) \in X \times Z) \vee ((a, b) \in Y \times Z) \Leftrightarrow (a, b) \in (X \times Z \cup Y \times Z) \end{aligned}$$

□

1.2 Relações binárias

Definição 1.11 (Relação binária)**.** *Sejam A e B conjuntos arbitrários. Chama-se relação binária entre A e B a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Escrevemos xRy com o significado de $(x, y) \in R$. Se $A = B$, dizemos tratar-se de uma relação binária em A.*

O domínio da relação binária entre A e B é o subconjunto de A constituído pelos elementos x para os quais existe pelo menos um elemento $y \in B$ tal que xRy. O contradomínio é o subconjunto de B constituído pelos elementos y para os quais existe pelo menos um elemento em A tal que xRy.

Definição 1.12 (Relação de equivalência)**.** *Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação binária em X. Diz-se que $\sim$ é uma relação de equivalência em X se e só se $\sim$ verificar as seguintes condições:*

1. $\forall x \in X \quad x \sim x$ *(Reflexividade).*
2. $\forall x, y \in X \quad x \sim y \implies y \sim x$ *(Simetria).*
3. $\forall x, y, z \in X \quad x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$ *(Transitividade).*

Exemplo 1.13. *Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e consideremos as seguintes relações em X:*

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\} \\
R_2 &= \{(a,b),(b,c),(a,c)\} \\
R_3 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,c)\} \\
R_4 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\} \\
R_5 &= \{(a,b),(c,e),(d,a),(d,b)\} \\
R_6 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d),(d,c)\} \\
R_7 &= \{(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b)\} \\
R_8 &= \emptyset \\
R_9 &= X \times X
\end{aligned}
$$

Apliquemos então as propriedades da relação binária:

- *(Reflexividade) Pela definição, para todos os pares $(x, x) \in R_i$ para qualquer $x \in X$. Por exemplo, R_6 é reflexiva porque tem todos os pares $\{(x, x) : x \in X\}$, já a relação R_1 não contém os par necessários para satisfazerem a propriedade em questão. Assim, apenas podemos considerar as relações R_3, R_4, R_6 e R_9 é que são reflexivas.*

- *(Simetria) Para qualquer par $(x, y) \in R_i$, sendo $x, y \in X$, também tem de existir o par $(y, x) \in R_i$. Ou seja, se considerarmos a relação R_1 e se escolhermos o par (a, b) também existe o par simétrico em R_1, isto é (b, a) e mesmo acontece para o resto dos pares do conjunto. No entanto, se considerarmos a relação R_2 e escolhermos o par (a, b) podemos concluir que essa relação não é simétrica pois o par $(b, a) \notin R_2$. Então, de todas as relações, são simétricas: R_1, R_4, R_6, R_8, R_9.*

- *(Transitividade) Para quaisquer $x, y, z \in X$, se um par $(x, y) \in R_i$ e se o par $(y, z) \in R_i$, então tem de existir o par (x, z), por exemplo: a relação R_2 é transitiva porque*

$$(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_2$$

  Portanto, ao fazermos esse mesmo racioínio para todas as relações, podemos concluir que apenas são transtivas as relações: $R_2, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$ e R_9

Assim, das nove relações apenas são relações de equivalências as R_4, R_6, R_9

Definição 1.14. *Dada uma relação de equivalência $\sim$ num conjunto X e um elemento $x \in X$, pode definir-se um subconjunto $[x]$ de X, chamado classe de equivalência em X determinado por x, da seguinte forma:*

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Chama-se quociente, ou partição, de X por $\sim$, e designa-se por $X/\sim$, ao conjunto das classes de equivalência de X determinadas pela relação de equivalência $\sim$.

Exemplo 1.15. *Aproveitando o exemplo 1.13,*

$$\begin{aligned}
[a]_{R_4} &= \{a\} \\
[b]_{R_4} &= \{b\} \\
[c]_{R_4} &= \{c\} \\
[d]_{R_4} &= \{d\} \\
[e]_{R_4} &= \{e\}
\end{aligned}$$

por isso, podemos escrever

$$X/R_4 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\big\},$$

Usando o mesmo processo para R_6:

$$\begin{aligned}
[a]_{R_6} &= \{a\} \\
[b]_{R_6} &= \{b\} \\
[c]_{R_6} &= \{c, d\} = \{d, c\} \\
[d]_{R_6} &= \{d, c\} = \{c, d\} \\
[e]_{R_6} &= \{e\}
\end{aligned}$$

então:

$$X/R_6 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{e\}\big\}.$$

Do mesmo modo, podemos escrever que

$$X/R_9 = \big\{X\big\}.$$

Como elustrão os exemplos anteriores, o conjunto quociente satisfaz a seguinte propriedade:

Proposição 1.16. *Duas classes de equivalência num conjunto X são conjuntos iguais ou disjuntos. Além disso, a coleção das classes de equivalência de X é uma partição de X. De facto, tem-se:*

(i) $\forall x \in X,\ [x] \neq \emptyset$.

(ii) $[x] = [y] \iff x \sim y$.

(iii) $[x] \neq [y] \iff [x] \cap [y] = \emptyset$.

(iv) $\bigcup_{x \in X} [x] = X$.

Demonstração.

(i) Seja $x_0 \in X$ e $[x_0] = \{y \in X : y \sim x_0\}$.
Como $x_0 \sim x_0 \Rightarrow x_0 \in [x_0]$, logo $[x_0] \neq \emptyset$. Assim $\forall x \in X$, $[x] \neq \emptyset$.

(ii) Mostremos que $[x] = [y] \Rightarrow x \sim y$.
Consideremos um elemento $x' \in [x]$, isto é, $x' \sim x$. Como $[x] = [y]$ então $x' \in [y] \Rightarrow x' \sim y$ e assim ao usar a transitividade e simetria obtemos:

$$x' \sim x \wedge x' \sim y \Leftrightarrow x \sim x' \wedge x' \sim y \Rightarrow x \sim y.$$

Passemos agora ao recíproco.
Para demonstrar que $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$ temos de mostrar que $x \sim y \Rightarrow [x] \subset [y]$ e que $x \sim y \Rightarrow [y] \subset [x]$, sendo assim, comecemos por mostrar que $x \sim y \Rightarrow [x] \subset [y]$.
Seja $x_0 \in [x]$, isto é, $x_0 \sim x$,pela definição de $[x]$. Por hipótese, sabemos que $x \sim y$ e assim temos que:

$$x_0 \sim x \wedge x \sim y \Rightarrow x_0 \sim y, (\text{por transitividade})$$

ou seja, $x_0 \in [y]$ provando que $[x] \subset [y]$.
Para mostrar $x \sim y \Rightarrow [y] \subset [x]$ basta usar a propriedade de simetria de uma relação de equivalência. Então $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ e assim é fazer o mesmo raciocínio para $[y]$ e prova-se facilmente que $[y] \subset [x]$.

(iii) Comecemos por mostrar que $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$.
Suponhamos que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, isto é, existe um elemento $x' \in [x]$ e $x' \in [y]$. Usando as propriedades de transição e simetria temos que:

$$x' \sim x \wedge x' \sim y \Leftrightarrow x \sim x' \wedge x' \sim y \Rightarrow x \sim y.$$

Então estamos nas condições da propriedade *ii*), logo $[x] = [y]$.
Mostremos agora o recíproco, isto é, $[x] \cap [y] = \emptyset \Rightarrow [x] \neq [y]$.
Usemos novamente a metodologia da contra-reciproca. Se $[x] = [y]$ então $[x] \subset [y] = [x]$ ou $[x] \subset [y] = [y]$ e isso significa que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

(iv) Mostremos que $\bigcup_{x \in X} [x] \subset X$. Fixemos $x \in X$, arbitrário, temos que $[x] = \{y \in X : y \sim x\} \Rightarrow [x] \subset X$. Então se é válido para um elemento arbitrário de X, podemos concluir que também é válido para todos os elementos de X, logo:

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subset X.$$

Passemos ao recíproco. Como $\forall x_0 \in [x_0] \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{x \in X} [x]$, pois $\bigcup_{x \in X} [x] = [x_0] \cup [x_1] \cup [x_2] \cdots$.
Portanto, $X \subset \bigcup_{x \in X} [x]$.

□

Exemplo 1.17.

a. Consideremos o conjunto $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *de todos os pares ordenados de números naturais e a relação de equivalência assim definida:*

$$\forall_{m,n,p,q \in \mathbb{N}} \qquad (m,n) \sim (p,q) \quad \iff \quad m+q = n+p\,.$$

As classes de equivalência determinadas pela relação de equivalência $\sim$ *em* $\mathbb{N}^2$ *chamam-se inteiros relativos ou simplesmente inteiros. Tomemos como exemplo mais concreto os seguintes números:*

$$\begin{aligned} 0 &= [(0,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (a,b) \sim (0,0)\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),...\} \\ 1 &= [(1,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (a,b) \sim (1,0)\} = \{(1,0),(2,1),(3,2),...\} \\ -1 &= [(0,1)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (a,b) \sim (0,1)\} = \{(0,1),(1,2),(2,3),...\} \end{aligned}$$

O conjunto dos inteiros relativos, que designamos por $\mathbb{Z}$*, é então o quociente de* $\mathbb{N}^2$ *pela relação* $\sim$*.*

b. Designemos por F *o subconjunto de* $\mathbb{Z}^2$ *assim definido:*

$$F = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b \neq 0\}\,.$$

No conjunto F *definamos a relação de equivalência* $\sim$ *do seguinte modo:*

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \iff \quad ad = bc\,.$$

As classes de equivalência determinadas pela relação de equivalência $\sim$ *em* F *chamam-se números racionais. Tomemos como exemplo mais concreto os seguintes números:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= [(1,2)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (a,b) \sim (1,2)\} = \{(1,2),(2,4),(3,6),...\} \\ \frac{3}{8} &= [(3,8)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (a,b) \sim (3,8)\} = \{(3,8),(6,16),...\} \\ -\frac{1}{2} &= [(-1,2)] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (a,b) \sim (-1,2)\} = \{(-1,2),(1,-2),(-2,4),(-4,6),(-3,6),(3,-6),...\} \end{aligned}$$

O conjunto dos números racionais, que designamos por $\mathbb{Q}$*, é o quociente de* F *por* $\sim$*.*

Definição 1.18 (Relação de ordem)**.** *Sejam* X *um conjunto e* $\leq$ *uma relação binária em* X*. Diz-se que* $\leq$ *é uma relação de ordem em* X *se e só se* $\leq$ *verificar as seguintes condições:*

1. *(Reflexividade)* $\forall x \in X \quad x \leq x$*.*
2. *(Anti-simétrica)*$\forall x,y \in X \quad x \leq y \ \wedge \ y \leq x \implies x = y$*.*
3. *(Transitividade)* $\forall x,y,z \in X \quad x \leq y \ \wedge \ y \leq z \implies x \leq z$*.*

Chamamos conjunto ordenado a todo o conjunto munido de uma relação de ordem.

Exemplo 1.19. *Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e consideremos as mesmas relações do exemplo 1.13.*

Como são as mesmas relações, para mostrar as relações de equivalência, destas já sabemos quais são as reflexivas e as transitivas, por isso basta-nos mostrar as relações com propriedades anti-siméticas, isto é, se tivermos um par $(x, y) \in R_i$ e o par $(y, x) \in R_i$ então os elementos x e y são iguais.
Por exemplo, se escolhermos os pares $(a, b) \in R_1$ e $(b, a) \in R_1$, pela definição, tinhamos que $a = b$ o que não é verdade porque são elementos diferentes do conjunto X, logo R_1 não é Anti-simétrica. Portanto, para determinarmos uma relação que seja Anti-simétrica vamos ver quais as relações que não têm pares simétricos.

Assim, são anti-simétricas as relações R_2, R_3, R_4, R_5, R_7; assim, R_4 é a única relação de ordem.

Definição 1.20 (Relação de ordem total)**.** *Sejam X um conjunto e $\leq$ uma relação de ordem em X. Diz-se que a relação de ordem $\leq$ é total se e só se*

$$\forall_{x,y \in X} \qquad x \leq y \ \vee \ y \leq x \ .$$

Chamamos conjunto totalmente ordenado a todo o conjunto munido de uma relação de ordem total.

Exemplo 1.21. *Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são relações de ordem totais?*

Demonstração: Para mostrar que esses conjuntos são relações de ordem totais, temos de definir a ordem lexicográfica:

(i) Para quaisquer dois números z, w, só pode haver uma das seguinte relações:

$$z < w, w < z \ ou \ z = w;$$

(ii) Para quaisquer dois números z_1, z_2, z_3, $z_1 < z_2 \Rightarrow z_1 + z_3 < z_2 + z_3$; (Adição)

(iii) Para quaisquer dois números z_1, z_2, z_3 com $z_3 > 0$, $z_1 < z_2 \Rightarrow z_1.z_3 < z_2.z_3$; (Multiplicação)

Com esta definição é facil mostrar que o conjunto R é um conjunto de ordem total porque satisfaz todas as propriedades descritas, no entanto, o conjunto $\mathbb{C}$ acaba por não ser uma relação de ordem.
Para o ponto i), podemos tomar $x, y \in \mathbb{C}$, onde $x = a + bi$ e $y = c + di$, e comprar as partes imaginárias e reais entre si. Caso uma das partes tenha uma relação de ordem, então podemos ter $x < y$ ou $y < x$, caso contrário, se ambas as partes forem iguais temos que $x = y$. Ou seja, $\mathbb{C}$ verifica a propridade i)
Passemos à verificação do ponto iii). Se considerarmos $i > 0$, sendo $i = \sqrt{-1}$, e se multiplicarmos por i temos que $-1 < 0$ o que é falso, pois $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ significando que as regras de ordem dos números reais também têm de ser respeitadas no conjunto $\mathbb{C}$. Se considerássemos $i < 0$ acabariamos por ter o mesmo problema. Portanto, $\mathbb{C}$ não é um conjunto de ordem total.

Havendo uma relação de ordem, é possível usar os conceitos de majorantes, minorante, supremo, ínfimo, máximo e minímo da mesma maneira que os definimos para os números reais.

Exemplo 1.22. *Seja A um conjunto. A inclusão de conjuntos é uma relação de ordem em $\mathcal{P}(A)$. De facto, é evidente que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$,*

(i) $X \subset X$.

(ii) $X \subset Y \wedge Y \subset X \implies X = Y$.

(iii) $X \subset Y \wedge Y \subset Z \implies X \subset Z$.

Consideremos a coleção $\mathcal{A}$ *no universo* $\mathcal{P}\big(\{1,2,3,4,5,6\}\big)$*, sendo*

$$\mathcal{A} = \{\{1,2,4\},\{2,4\},\{2,3,4\},\{2,4,5\},\{2,3,4,6\}\}$$

- *Os majorantes de* A*, pela definição de majorante, é:*

  $$m = \{\{1,2,3,4,5,6\}\}\,.$$

  Como apenas existe um majorante, esse vai ser o supremo de A*. Mas não podemos considerá-lo como o máximo de* A *visto que não pertence ao conjunto em questão.*

- *Em relação aos minorantes, temos que:*

  $$n = \{\{2\},\{4\},\emptyset,\{2,4\}\}\,.$$

  Ao contrário dos majorantes, os minorantes estão todos contidos nos conjuntos de A*. Sendo assim, escolhemos para ínfimo o maior dos minorantes devido à relação de inclusão, isto é, o conjunto que contém todos os minorates é* $\{2,4\}$*. Visto que o infímo pertence a* A*, podemos dizer que esse mesmo conjunto é o minimo de* A*.*

1.3 Aplicações

Definição 1.23 (Aplicação)**.** *Sejam* A *e* B *conjuntos arbitrários. Designa-se por* $f : A \to B$ *e chama-se aplicação de* A *em* B*, ou função de domínio* A *com valores em* B*, a toda a relação binária* f *entre* A *e* B*, com domínio igual a* A*, tal que*

$$\forall_{x\in A}\,\forall_{y,z\in B} \quad xfy \wedge xfz \implies y = z\,.$$

Uma aplicação f de A em B associa a cada elemento $x \in A$ um e um único elemento $y \in B$, o qual designamos por $f(x)$ e chamamos valor de f no ponto x ou imagem de x por f. Notemos que o domínio de f é o conjunto A e que o contradomínio é um subconjunto de B. Ao conjunto B chamamos conjunto de chegada.

Exemplo 1.24. *Seja* $A = \{a,b,c\}$ *e* $B = \{1,2,3\}$*.*
O conjunto $\{(a,1),(b,1),(c,3)\}$ *é uma aplicação. Já o conjunto* $\{(a,2),(a,3),(b,2),(c,3)\}$ *não o é, visto que o elemento* $a \in A$ *está na primeira coordenada em dois pares distintos, e o mesmo acontece para o conjunto* $\{(a,1),(b,2)\}$*, onde o elemento* $c \in A$ *não aparece no conjunto.*

Definição 1.25 (Imagem direta e imagem inversa de um conjunto por uma função)**.** *Sejam* A *e* B *conjuntos arbitrários,* $f : A \to B$ *uma função de domínio* A *com valores em* B*, e* $A_0 \subset A$*,* $B_0 \subset B$*.*

- *Designa-se for* $f(X)$ *e chama-se imagem direta de* X *por* f *ao conjunto definido por*

  $$f(A_0) = \{y \in B : \exists_{x\in A_0}\ \ y = f(x)\}\,.$$

- *Designa-se for $f^{-1}(Y)$ e chama-se imagem inversa de Y por f ao conjunto definido por*

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}.$$

A proposição seguinte garante que a imagem inversa por uma função preserva inclusões, uniões, interseções e diferenças de conjuntos, mas que a imagem direta preserva apenas inclusões e uniões.

Proposição 1.26. *Seja $f : A \to B$ uma função de domínio A com valores em B e sejam A_0, A_1 subconjuntos de A e B_0, B_1 subconjuntos de B. Então:*

(i) $B_0 \subset B_1 \implies f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.

(ii) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.

(iii) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.

(iv) $f^{-1}(B_0 - B_1) = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$.

(v) $A_0 \subset A_1 \implies f(A_0) \subset f(A_1)$.

(vi) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.

(vii) $f(A_0 \cap A_1) \subset (f(A_0) \cap f(A_1))$.

(viii) $f(A_0 - A_1) \supset f(A_0) - f(A_1)$.

Demonstração.

(ii) Mostremos que $f^{-1}(B_0 \cup B_1) \subset f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.
Seja $x_0 \in f^{-1}(B_0 \cup B_1)$, então

$$\begin{aligned} f(x_0) \in (B_0 \cup B_1) &\Rightarrow f(x_0) \in B_0 \cup B_1 \\ &\Rightarrow f(x_0) \in B_0 \vee f(x_0) \in B_1 \\ &\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(B_0) \vee x_0 \in f^{-1}(B_1) \\ &\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1). \end{aligned}$$

Para o recíproco, seja $x_0 \in \left(f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)\right)$, isto é,

$$\begin{aligned} x_0 \in f^{-1}(B_0) \vee x_0 \in f^{-1}(B_1) &\Rightarrow f(x_0) \in B_0 \cup f(x_0) \in B_1 \\ &\Rightarrow f(x_0) \in (B_0 \cup B_1) \\ &x \in f^{-1}(B_0 \cup B_1) \end{aligned}$$

□

Segue-se um contra-exemplo para mostrar que a inclusão contrária da proposição 1.26 vii) não é verdadeira.

Exemplo 1.27. *Seja $A = \{a, b\}$ e $B = \{c\}$ e a função $f : A \to B$, tal que $f(a) = f(b) = c$ Ao considerarmos $A_0 = \{a\}$ e $A_1 = \{b\}$ temos que $f(A_0) = \{c\}$ e $f(A_1) = \{c\}$.*
Fazendo:

$$A_0 \cap A_1 = \emptyset \implies f(A_0 \cap A_1) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Mas,

$$f(A_0) \cap f(A_1) = \{c\} \not\subset \emptyset.$$

Mostrando assim que $f(A_0) \cap f(A_1) \neq f(A_0 \cap A_1)$

Definição 1.28 (Função injetiva e função sobrejetiva)**.** *Sejam A e B conjuntos, $f : A \to B$ uma função de domínio A com valores em B.*

- *Diz-se que f é injetiva se*

$$\forall_{x,y\in A} \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)\,.$$

ou, de forma equivalente, se

$$\forall_{x,y\in A} \quad f(x) = f(y) \implies x = y\,.$$

- *Diz-se que f é sobrejetiva se*

$$\forall_{y\in B} \ \exists_{x\in A} \quad y = f(x)\,.$$

A função f diz-se bijetiva se for injetiva e sobrejetiva, isto é, se

$$\forall_{y\in B} \ \exists^1_{x\in A} \quad y = f(x)\,.$$

Como vimos pelo exemplo 1.27, a inclusão contrária da proposição 1.26*vii*) não é verdadeira, pois a função apresentada não é injetiva. Se fosse, poderíamos concluir a igualdade da proposição referida. O mesmo acontece para a proposição 1.26*viii*).

Proposição 1.29. *Seja $f : A \to B$ uma função de domínio A com valores em B e sejam $A_0 \subset A$ e $B_0 \subset B$. Então:*

(i) $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$.

(ii) $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$.

(iii) Se f é injetiva então $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$.

(iv) Se f é sobrejetiva então $B_0 = f(f^{-1}(B_0))$.

Definição 1.30 (Restrição e Prolongamento de uma função)**.** *Sejam A e B conjuntos e X um subconjunto de A. Seja $f : A \to B$ uma função. Chama-se restrição de f ao conjunto X à função $f|_X : X \to B$ tal que*

$$\forall_{x\in X} \quad f|_X(x) = f(x)\,.$$

Diz-se também que f é um prolongamento de $f|_X$.

Definição 1.31 (Função composta)**.** *Sejam A, B, C, D conjuntos, $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções. Seja A_0 o subconjunto de A formado pelos pontos cujas imagens pela função f pertencem a C, isto é, o conjunto assim definido:*

$$A_0 = f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}\,.$$

Chama-se função composta de g e f à função $g \circ f : A_0 \to D$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Definição 1.32. *Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. f diz-se invertível se existe uma função $g : B \to A$ tal que*

$$g \circ f = id_A \qquad e \qquad f \circ g = id_B\,,$$

onde id_X designa a função identidade definida no conjunto X com valores em X, isto é, a função $id_X : X \to X$ definida por $id_X(x) = x$.

Teorema 1.33. *Sejam A e B conjuntos, $f : A \to B$ uma função. f é invertível se e só se for bijetiva.*

Capítulo 2

Espaços Topológicos e Funções Contínuas

2.1 Topologia

Nesta secção, vamos tratar de famílias de conjuntos com determinadas propriedades e aos seus elementos vamos chamá-los de abertos.

Definição 2.1 (Topologia)**.** *Uma topologia num conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ *e* $X \in \mathcal{T}$.
2. *A união dos elementos de uma coleção arbitrária* $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ *pertence a* $\mathcal{T}$.
3. *A interseção dos elementos de uma coleção finita* $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ *pertence a* $\mathcal{T}$.

A partir desta definição, podemos chamar de espaço topológico ao par ordenado $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. Os elementos desse espaço topológico, são subconjuntos de X que pertencem a $\mathcal{T}$ denominados por abertos.

Exemplo 2.2. *Seja* $X = \{a, b, c\}$. *As coleções* $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{T}_4 = \mathcal{P}(X)$ *são exemplos de topologias no conjunto* X. *No entanto, se considerarmos a coleção* $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, *ao aplicarmos a propriedade das interseções de abertos, percebemos rapidamente que* $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ *e esse conjunto* $\{b\}$ *não consta na coleção* $\mathcal{T}_5$, *logo* $\mathcal{T}_5$ *não é uma topologia em* X.

Exemplo 2.3 (Topologia discreta e topologia trivial)**.** *Dado um conjunto* X, *chamamos topologia discreta à coleção* $\mathcal{P}(X)$ *e topologia trivial à coleção* $\{\emptyset, X\}$.

Definição 2.4. *Dadas as topologias* $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{T}'$ *num conjunto* X, *diz-se que* $\mathcal{T}$ *é mais fina do que* $\mathcal{T}'$ *se* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. *Diz-se ainda que* $\mathcal{T}$ *é estritamente mais fina do que* $\mathcal{T}'$ *se* $\mathcal{T}'$ *está estritamante contida em* $\mathcal{T}$.

Pela definição de topologia, podemos constatar que qualquer topologia é mais fina do que a topologia trivial devido à propriedade 2.1.1.

Exemplo 2.5 (Topologia co-finita)**.** *Seja X um conjunto qualquer. Chamamos topologia co-finita em X à coleção $\mathcal{T}_c$ definida por*

$$\mathcal{T}_c = \{U \subset X : X - U \text{ é finito} \vee X - U = X\}.$$

Vejamos se facto, $\mathcal{T}_c$ é uma topologia:

Comecemos por mostrar que os conjuntos X e $\emptyset$ pertencem à coleção. Considermos os abertos $U = X$ e $V = \emptyset$. Temos então que:

$$\begin{cases} U = X \Rightarrow X - U = X - X = \emptyset, \text{ como } \emptyset \text{ é finito } U \in \mathcal{T}_c \\ V = \emptyset \Rightarrow X - V = X - \emptyset = X \Rightarrow V \in \mathcal{T}_c \end{cases}$$

Com a primeira propriedade verificada, passemos para as próximas. Mostremos que tendo $(A_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{T}_c$, então $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}_c$, isto é, $X - \bigcup_\alpha A_\alpha$ é finito ou que é igual X. Designemos $U = \bigcup_\alpha A_\alpha$ temos que:

$$X - U = X - \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X - A_\alpha). \quad (\textit{proposição 1.8.v})$$

Sabemos que $\forall_\alpha\ X - A_\alpha$ é finito $\vee\ X - A_\alpha = X$, pois $A_\alpha \in \mathcal{T}_c$. Então:

- *Se $\forall_\alpha\ X - A_\alpha = X$ temos:*

$$\Rightarrow \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) = \bigcap_\alpha X = X \Rightarrow U \in \mathcal{T}_c$$

- *Se $\exists \alpha_0\ :\ X - A_{\alpha_0}$ é finito temos:*

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) \subset (X - A_{\alpha_0}) \\ &\Rightarrow \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) \text{ é finito} \\ &\Rightarrow U \in \mathcal{T}_c \end{aligned}$$

Agora verifiquemos a propriedade referente às interseções finitas dos abertos de $\mathcal{T}_c$. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{T}_c$ e ao tomarmos $U = \bigcap_{i=1}^n A_i$, temos que:

$$X - U = X - \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (X - A_i). \quad (\textit{proposição } 1.8.vi)$$

Por consequência,

- *Se $\exists_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $X \backslash A_i = X$, então temos*

$$\bigcup_{i=1}^n (X \backslash A_i) = X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_c.$$

- *Se* $\forall_i \in \{1, 2, \cdots, n\}\ X \backslash A_i \neq X \Rightarrow \forall_i\ X \backslash A_i$ *é finito. Logo* $\bigcup_{i=1}^{n}(X \backslash A_i)$ *é finito, porque é a reunião de um número finito de conjuntos finitos. Portanto,* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_c$.

Exemplo 2.6. *Sendo* X *um conjunto qualquer e* $\mathcal{T}$ *uma coleção definida por*

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : X - U \text{ é infinito} \vee X - U = X\}.$$

Mostremos através de um contra-exemplo que a coleção $\mathcal{T}$ *não é uma topologia.*
Seja $X = \mathbb{N}$ *e* $U_1 = \{1, 3, 5, \cdots\} \in \mathcal{T}$ *e* $U_2 = \{4, 6, 8, \cdots\} \in \mathcal{T}$*, ao usarmos a propriedade da união de elementos vamos ter que:*

$$X \backslash (U_1 \cup U_2) = \{2\} \notin \mathcal{T} \text{ porque é finito} \wedge X \backslash (U_1 \cup U_2) \neq X.$$

Exemplo 2.7. *Sendo* X *um conjunto qualquer e* $\mathcal{T}$ *uma coleção definida por*

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : X - U \text{ é finito ou numerável} \vee X - U = X\}$$

Esta coleção $\mathcal{T}$ *é uma topologia e usemos a definição de topologia para provar esta afirmação.*

Os conjuntos $\emptyset$ *e* X *pertencem à topologia, pela mesma razão que o exemplo da topologia co-finita.*
Sendo assim passemos às uniões dos elementos do conjunto. Dados $(A_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{T}$*, a união desses elementos pertence a* $\mathcal{T}$*, ou seja,* $X - \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha X \backslash A_\alpha \in \mathcal{T}$.
Se $\bigcap_\alpha X \backslash A_\alpha = X$*, então*

$$\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}, \text{ pois } \forall_\alpha\ A_\alpha = \emptyset \text{ é finito}$$

Caso $\bigcap_\alpha X \backslash A_\alpha \neq X$*, temos assim que:*

$$\exists_{\alpha_0} : X \backslash A_{\alpha_0} \neq X$$

Como sabemos que $X \backslash A_{\alpha_0}$ *é finito ou numerável,* $\bigcap_\alpha (X \backslash A_\alpha)$ *é finito ou numerável porque está contido em* $X \backslash A_{\alpha_0}$ *. Concluindo que* $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$.
Por fim, para as interseções finitas. Dados $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{T}$ *queremos mostrar que* $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i) \in \mathcal{T}$.
Suponhamos que existe pelo menos um elemento A_i *tal que* $X - A_i = X$*, então*

$$\bigcup_{i=1}^{n}(X \backslash A_i) = X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Agora, no caso de todos os A_i serem diferentes de $\emptyset$, isto é, $X - A_i \neq X$ então $X - A_i$ é finito ou numerável e temos assim que:

$$\begin{aligned}
&\forall_{i=\{1,\cdots,n\}} X\backslash A_i \text{ é finito ou numerável} \\
&\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n}(X\backslash A_i) \text{ (no máximo é numerável, pois a reunião finita} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de conjuntos numeráveis ainda é numerável.)} \\
&\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

Proposição 2.8. *Seja $f : X \to Y$ uma função de domínio X com valores em Y. Mostremos que:*

(a) Se $\mathcal{T}_Y$ é uma topologia no conjunto Y então a coleção $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{T}_Y\}$ é uma topologia no conjunto X.

(b) Se $\mathcal{T}_X$ é uma topologia no conjunto X então a coleção $\mathcal{T}_Y = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ é uma topologia no conjunto Y.

Dem.

a) Para provarmos que a coleção $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{T}_Y\}$ é uma topologia no conjunto X, essa coleção tem de respeitar as propriedades de uma topologia, então:

(1) Tomemos um aberto $V = \emptyset$, onde $V \in \mathcal{T}_Y$ pelo facto de $\mathcal{T}_Y$ ser uma topologia. Ao calcularmos a imagem inversa desse aberto obtemos:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Logo $\emptyset$ pertence a $\mathcal{T}_X$
Seja $V = Y$ um aberto de $\mathcal{T}_Y$ pelo facto de $\mathcal{T}_Y$ ser uma topologia. Ao calcularmos a imagem inversa desse aberto obtemos:

$$f^{-1}(V) = X.$$

Logo o conjunto X pertence a $\mathcal{T}_X$

(2) Neste ponto, queremos mostrar que a união arbitrária de abertos pertencentes a $\mathcal{T}_X$ pertence a $\mathcal{T}_X$.
Consideremos uma coleção arbitrária $(U_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{T}_X$. Queremos mostrar que $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}_X$.
Note-se que para cada α, existe um conjunto $V_\alpha \in Y$ tal que $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, uma vez que $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$.
Visto que $\bigcup_\alpha V_\alpha$ são abertos em $\mathcal{T}_Y$, então $f^{-1}(\bigcup_\alpha V_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ também vai ser aberto em $\mathcal{T}_X$.

(3) Passemos, por fim, às interções finitas de abertos da coleção X.
Sejam $U_1, U_2, \cdots, U_n$ abertos de $\mathcal{T}_X$. Queremos mostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_X$. Visto que para

cada $U_i \in \mathcal{T}_Y$,com $i = \{1, \ldots, n\}$, vai existir um $V_i \in \mathcal{T}_Y$ tal que $U_i = f^{-1}(V_i)$.

Visto que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ são abertos na topologia $\mathcal{T}_Y$, então $f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} V_i) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ também vai ser aberto em $\mathcal{T}_X$.

Conclusão, a coleção $\mathcal{T}_X$ é uma topologia.

b) Para provarmos que a coleção $\mathcal{T}_Y = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ é uma topologia no conjunto Y, essa coleção tem de respeitar as propriedades de uma topologia, então:

(1) O conjunto vazio pertence a $\mathcal{T}_Y$ porque se tomarmos $V = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(V) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$, mostra que o conjunto vazio pertence à coleção $\mathcal{T}_Y$. Com a mesma lógia, mostraremos que o conjunto Y também pertence a $\mathcal{T}_Y$. Consideremos $U = Y$ e aplicando a imagem inversa temos $f^{-1}(V) = X \in \mathcal{T}_X$, portanto Y pertence $\mathcal{T}_Y$.

(2) Mostremos que a união arbitrária de abertos em $\mathcal{T}_Y$ pertence à coleção $\mathcal{T}_Y$.
Seja $(V_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{T}_Y$ e mostremos que $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \mathcal{T}_Y$.
Consideremos, que para todo o α, $f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{T}_X$ é um aberto na topologia de $\mathcal{T}_X$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \forall_\alpha \, f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{T}_X &\Rightarrow \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{T}_X \\ &\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_\alpha V_\alpha) \in \mathcal{T}_X \end{aligned}$$

Como $f^{-1}(\bigcup_\alpha V_\alpha)$ é um aberto em $\mathcal{T}_X$, consequentemente, $\bigcup_\alpha V_\alpha$ vai pertencer a $\mathcal{T}_Y$.

(3) Mostremos que a interseção finita de aberto da coleção $\mathcal{T}_Y$ pertence a $\mathcal{T}_Y$. Ou seja, dados $V_1, V_2, \cdots, V_n$ pertencentes a $\mathcal{T}_Y$, a $\bigcap_{i=0}^{n}(V_i) \in \mathcal{T}_Y$.
Comecemos por notar que para qualquer $i = \{1, \cdots, n\}$, $V_i \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X$. Com esta observação, vamos considerar todos os $f^{-1}(V_i)$ abertos em $\mathcal{T}_X$, com $i = 1, \cdots, n$ temos assim:

$$\begin{aligned} \forall_{i \in \{1, \cdots, n\}} \, f^{-1}(V_1) \in \mathcal{T}_X &\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X \\ &\Rightarrow f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} V_i) \in \mathcal{T}_X \end{aligned}$$

Visto que $f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} V_i)$ é um aberto em $\mathcal{T}_X$, consequentemente $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ é um aberto pertencente a $\mathcal{T}_Y$.

Podemos conluir assim que a coleção $\mathcal{T}_Y$ é uma topologia.

□

Na proposição que se segue, vamos mostrar algumas propriedades das topologias, como exemplo, a existencia da maior e da menor topologia que está contida ou contém uma família de topologias.

Proposição 2.9. *Sejam X um conjunto arbitrário e $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ uma coleção de topologias em X. Então,*

(a) $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{T}_\alpha$ *é uma topologia em* X.

(b) $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{T}_\alpha$ *é a maior topologia contida em todas as topologias* $\mathcal{T}_\alpha$*, isto é, se* $\mathcal{T}'$ *é uma topologia contida em todas as topologias* $\mathcal{T}_\alpha$*, então* $\mathcal{T}' \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{T}_\alpha$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ satisfaz todas as propriedades de uma topologia:

(1) Consideremos o aberto $U \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$, ou seja, $U \in \mathcal{T}_\alpha \ \forall_\alpha$. Portanto, se tomarmos $U = \emptyset$ ou $U = X$, estes acabam por pertencer a $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$, visto que, para todo o α, $\mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia.

(2) Mostremos que se $(A_\beta)_\beta \subset \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ então $\bigcup_\beta A_\beta \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$.

Vamos considerar $U = \bigcup_\beta A_\beta$. Ora se $(A_\beta)_\beta \subset \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ então $(A_\beta)_\beta \subset \mathcal{T}_\alpha \ \forall_\alpha$. Portanto $U \in \mathcal{T}_\alpha \forall_\alpha$, porque para todo o α, $\mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia. Logo, $U \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha \Rightarrow \bigcup_\beta A_\beta \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$

(3) Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ e queremos mostrar que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$.

Para qualquer α_0 fixo, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_{\alpha_0}$ pelo facto de $\mathcal{T}_{\alpha_0}$ ser uma topologia. Então, para qualquer α, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_\alpha$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$

(b) Seja $\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}_\alpha$. Como vimos anteriormente, $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e pelo facto de ser a interseção das topologias $\mathcal{T}_\alpha$, ao considerarmos qualquer aberto $U \in \mathcal{T}$, temos que

$$\forall_\alpha : U \in \mathcal{T}_\alpha.$$

Portanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\alpha \ \forall_\alpha$. Por outro lado, se $\mathcal{T}'$ é uma topologia contida em todas as topologias pertencentes à coleção $\{\mathcal{T}_\alpha\}$, então qualquer aberto $U \in \mathcal{T}'$ pertence a todas essa topologias $\mathcal{T}_\alpha$, isto é

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{T}' &\Rightarrow U \in \mathcal{T}_\alpha \ \forall_\alpha \\ &\Rightarrow U \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha. \end{aligned}$$

Logo, U pertence a $\mathcal{T}$.

□

Exemplo 2.10. *Em geral, $\bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ não é uma topologia em X.*
Vejamos o porquê: Seja $X = \{a, b\}$ e sejam $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$ topologias deinidas em X da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_1 = \{\{a, b\}, \emptyset\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\{a, b\}, \emptyset, \{a\}\}$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\{a, b\}, \emptyset, \{b\}\}$$

Para este exemplo, a união das topologias $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3 = \mathcal{P}(X)$, logo continua a ser uma topologia. Mas se tomarmos $X = \{a, b, c\}$ e redefinirmos as topologias da seguinte forma:

$$\mathcal{T}_1 = \{\{a, b, c\}, \{\emptyset\}\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\{a, b, c\}, \{\emptyset\}, \{a\}\}$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\{a, b, c\}, \{\emptyset\}, \{b\}\}$$

Podemos usar estas topologias como contra-exemplo, porque a propriedade da união de abertos falha. A união das topologias não é uma topologia porque a união é $\mathcal{T} = \{\{a, b, c\}, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ e o $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ não consta de nenhuma das topologias.

Proposição 2.11. *Sejam X um conjunto arbitrário e $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ uma coleção de topologias em X. Então, existe uma única topologia $\mathcal{T}$ que contém todas as topologias $\mathcal{T}_\alpha$ e de tal forma que se $\mathcal{T}'$ é uma topologia contendo todas as topologias $\mathcal{T}_\alpha$, então $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Dizemos que $\mathcal{T}'$ é a menor topologia que contém todas as topologias $\mathcal{T}_\alpha$. Essa topologia é dada por*

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : U \text{ é a união de interseções finitas de elementos de } \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{T}_\alpha\}$$

2.2 Base topológica

Definição 2.12. *Uma base topológica num conjunto X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

1. $\forall_{x \in X} \quad \exists_{B \in \mathcal{B}} : x \in B$.

2. $\forall_{x \in X} \quad \forall_{B_1, B_2 \in \mathcal{B}} \quad x \in B_1 \cap B_2 \implies \exists_{B_3 \in \mathcal{B}} : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \wedge x \in B_3$.

Exemplo 2.13.

a. *Seja $X = \{a, b, c, d\}$. A coleção $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ de subconjuntos de X é uma base topológica de X. No entanto, a coleção $\mathcal{C} = \{\{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ não é uma base topológica de X devido à segunda propriedade, ou seja, tomando $x = a$,$B_1 = \{a, b\}$ e $B_2 = \{a, c\}$:*

$$a \in \{a, b\} \cap \{a, c\}$$

Mas não existe B_3 tal que

$$B_3 \subset B_1 \cap B_2 \wedge x \in B_3$$

b. O conjunto de todos os intervalos abertos e limitados

$$\mathcal{B} = \{]a,b[: a,b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

é uma base topológica em $\mathbb{R}$

Esta base vai ser estudada mais à frente quando se introduzir o conceito de topologia gerada por uma base e será demoninada, topologia usual ou topologia standard.

Definição 2.14 (Topologia gerada por uma base topológica)**.** *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base topológica num conjunto* X*. Chamamos topologia gerada por* $\mathcal{B}$ *à coleção* $\mathcal{T}$ *de subjuntos de* X *assim definida: Um conjunto* $U \subset X$ *pertence a* $\mathcal{T}$ *se*

$$\forall_{x \in U} \quad \exists_{B \in \mathcal{B}} : \ x \in B \ \wedge \ B \subset U\,.$$

Uma nota sobre esta definição 2.14.
Os elementos $(B_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{B}$ são abertos da topologia $\mathcal{T}$, uma vez que a condição vai ser verificada, isto é

$$\forall_{x \in B_\alpha} \quad \exists_{B = B_\alpha \in \mathcal{B}} : \ x \in B \ \wedge \ B \subset B_\alpha.$$

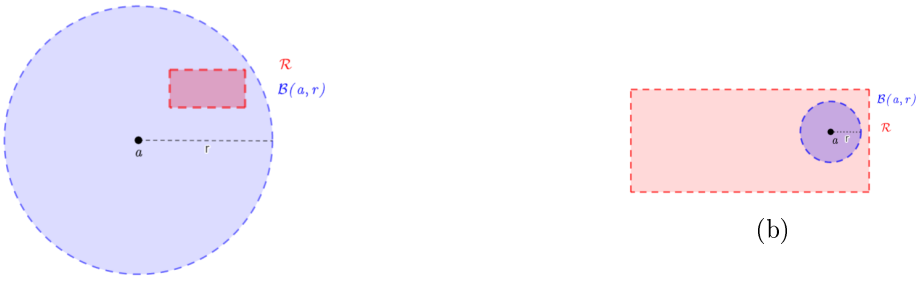
Exemplo 2.15. *Como foi referido no exemplo 2.13.b, existe uma topologia que denominamos por topologia usual ou topologia standard em* $\mathbb{R}$ *à topologia que é gerada pela coleção* $\mathcal{B}$*.*

Exemplo 2.16. *Um exemplo interesante relativo a esta definição, é o facto de haver a possíbilidade de existirem bases diferentes que geram a mesma topologia.*
Por exemplo, consideremos o espaço $\mathbb{R}^2$*, se definirmos* $\mathcal{B}$ *como uma coleção constituída por retângulos e* $\mathcal{B}'$ *também uma coleção mas constituída por bolas, essas bases acabam por definir a mesma topologia como mostra a figura 2.1.*
Explicando o exemplo de uma forma mais direta, consideremos $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}\right)$ *e* $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}'\right)$*, onde* $\mathcal{T}$ *é a topologia gerada pela coleção da bolas:*

$$\mathcal{B}\left(a,r\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x-a|| < r\right\}, \quad a \in \mathbb{R}^2, \ r > 0$$

e $\mathcal{T}'$ *é a topologia gerada pela coleção dos rectângulos:*

$$\mathcal{R} =]a,b[\times]c,d[\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}^2$$



(a) (b)

Figura 2.1: *a*) Retângulo $\mathcal{R}$ contido na bola $\mathcal{B}$. *b*) Bola $\mathcal{B}$ contida no retângulo $\mathcal{R}$.

Facilmente conseguimos perceber tanto os conjuntos $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *são bases topológicas em* $\mathbb{R}$*. Mais à frente, no teorema 2.20 iremos perceber o porquê destas bases gerarem a mesma topologia em* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 2.17. *Se considerarmos um conjunto X e uma coleção formada por todos os subconjuntos de X constituídos por um único elemento, essa dita coleção é uma base topológica pelos seguintes factos:*

1 Para qualquer $x \in X$, esse vai pertencer ao conjunto $\{x\}$.

2 Suponhamos que existem dois conjuntos unitários arbitrários B_1 e B_2 com elementos em X.

- *Se B_1 e B_2 forem disjuntos, isto é, têm elementos em comum, então:*

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

  Portanto, a propriedade de base é verificada.

- *Se $B_1 = B_2$, ou seja, caso B_1 e B_2 tenham o mesmo elemento x, vamos ter que:*

$$B_1 \cap B_2 = \{x\} \implies \exists B_3 : \ B_3 = \{x\} \wedge x \in B_3.$$

  Logo, B_3 vai ser igual aos outros dois conjuntos, verificando mais uma vez a propriedade de uma base.

Proposição 2.18. *Seja $\mathcal{B}$ uma base topológica num conjunto X e $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{B}$. Então $\mathcal{T}$ é a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Lema 2.19. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ uma coleção que satisfaz a propriedade seguinte:*

$$\forall_{U \in \mathcal{T}} \, \forall_{x \in U}, \ \exists_{C \in \mathcal{C}} : \ x \in C \subset U \, .$$

Então, $\mathcal{C}$ é uma base topológica para a a topologia $\mathcal{T}$.

O teorema que se segue vai ser mencionado novamente com o mesmo intuito na secção dos espaços métricos onde são usadas bolas e por consequência temos uma "utilização" menos abstrata do que este teorema afirma.

Teorema 2.20. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases topológicas para as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, respetivamente, no conjunto X. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

(ii) Para todo $x \in X$ e para todo conjunto $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B$, existe um conjunto $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Este teorma 2.20 é muito importante e pode ser usado no exemplo 2.16 para mostrar que essas bases definem a mesma topologia.

2.3 Topologia produto de $X \times Y$

Definição 2.21 (Topologia produto de $X \times Y$)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $\mathcal{B}$ a coleção definida por*

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \text{ é um aberto de } X \text{ e } V \text{ é um aberto de } Y\}.$$

Chamamos topologia produto de $X \times Y$ à topologia gerada por $\mathcal{B}$ em $X \times Y$. ***Nota:*** *é possível mostrar que a coleção $\mathcal{B}$ é de facto uma base topológica. (James R. Munkres[1])*

Teorema 2.22. *Seja X o espaç co topológico gerado pela base $\mathcal{B}_1$ e seja Y o espaço topológico gerado pela base $\mathcal{B}_2$. A coleção $\mathcal{B}$ definida por*

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ e } B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

é uma base topológica para a topologia produto de $X \times Y$.

Definição 2.23. *Sejam X, Y conjuntos arbitrários. Chama-se projeção canónica de $X \times Y$ em X à função $\pi_X : X \times Y \to X$ definida por*

$$\pi_X(x, y) = x$$

e projeção canónica de $X \times Y$ em Y â função $\pi_Y : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_Y(x, y) = y\,.$$

2.4 Topologia induzida ou topologia de subespaço

Definição 2.24. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subset X$. Chama-se topologia induzida em Y por X ou topologia de subespaço à coleção*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}\,.$$

Com a topologia $\mathcal{T}_Y$ assim definida, diz-se que Y é um subespaço topológico de X.
Nota: *Mostra-se que a coleção T_Y definida acima é uma topologia em Y. (James R. Munkres[1])*

Teorema 2.25. *Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia num conjunto X. A coleção*

$$\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base topológica para a topologia induzida em Y por X.

A propriedade que se segue tem a sua importância, pois no caso se sabermos que Y é um subespaço de X aberto, então qualquer U aberto da topologia em Y também é aberto na topologia de X. Mas no caso de isso não acontecer, isto é, se Y (pode não ser aberto) for um subespaço de X temos de expecificar a origem do aberto U. Ou seja, ou U é aberto na topologia em Y ou na topologia em X.

Proposição 2.26. *Seja X um espaço topológico e Y um subespaço topológico de X. Se U é um conjunto aberto de Y e Y é um conjunto aberto de X então U é um conjunto aberto de X.*

Proposição 2.27. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subespaço topológico de X. Consideremos a função inclusão $i : A \to X$ definida por $i(x) = x$ e a coleção*

$$\mathcal{T}_A = \{i^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}\}.$$

Então a topologia $\mathcal{T}_A$ em A coincide com a topologia induzida em A por X.

Mais uma vez, o exemplo que se segue é a aplicação das propriedades, teoremas e definições desta secção. O objetivo deste exemplo é verificar que os conjuntos abertos nem sempre são os mesmos para a topologia do espaço e para a topologia induzida.

Exemplo 2.28. *Considere o conjunto $Y = [-1, 1]$ como um subespaço topológico de $\mathbb{R}$ (com a topologia standard). Dos seguintes conjuntos, temos de indicar os que são abertos em $\mathbb{R}$ e os abertos em Y.*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| < 1\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\} \end{aligned}$$

A. Para uma forma mais fácil de perceber o conjunto, é desenvolvendo $|x|$:

$$\begin{aligned} A &= \left\{x :\in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| < 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \wedge |x| < 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x < 1\right\} \\ &= \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 1\right[\end{aligned}$$

O conjunto A é aberto em $\mathbb{R}$.
Relativamente à topologia induzida em Y pela de $\mathbb{R}$, ao fazermos $Y \cap A = A$ temos que o conjunto A é aberto em $\mathcal{T}_Y$.

B. Para uma forma mais fácil de perceber o conjunto, é desenvolvendo $|x|$ e temos que

$$B = \left[-1; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 1\right].$$

O conjunto B não é aberto em $\mathbb{R}$, mas relativamente à topologia $\mathcal{T}_Y$, o conjunto B é aberto porque $Y \cap V = B$, sendo V, por exemplo, $V =]-3 - \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 2[$ um aberto de $\mathbb{R}$.

C. Analogamente, temos que

$$C = \left]-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right[.$$

Em $\mathbb{R}$, o conjunto C não é aberto.
Para a topologia induzida em Y pela de R, o conjunto C também não é aberto, porque não conseguimos ter um aberto V em $\mathbb{R}$ tal que $C = V \cap Y$ devido dos pontos fronteiros $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ pertencerem a C.

D. Finalmente, temos que

$$D = \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Este conjunto não é aberto em $\mathbb{R}$ é também não vai ser aberto em $\mathcal{T}_Y$ porque não existe um aberto V em $\mathbb{R}$ tal que $D = Y \cap V$.

2.5 Interior, exterior, fronteira e aderência

Ao longo deste capítulo, temos vindo a falar de conjuntos aberto e fechados, mas agora vamos definir com mais rigor, sobre o que um conjunto aberto, fechado, também sobre a fronteida de um conjunto bem como a sua aderência.
De seguida ir-se-á mencionar algumas proposições e teoremas mais relevantes, ou melhor, mais engraçados/chamativos/usados(?). E por fim, serão realizados, como tem vindo a acontecer nas outras subsecções, alguns exemplos de aplicação sobre essas propriedas e teoremas.

Definição 2.29. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Diz-se que A é um conjunto fechado se o seu complementar, $X\backslash A$, for um conjunto aberto.*

Temos vindo a falar de topologias constituídas por abertos, mas visto que temos a definição de fechado, também podemos falar de topologias constituídas por fechados, ora vejamos o seguinte teorema:

Teorema 2.30. *Seja X um espaço topológico.*

(i) Os conjuntos $\emptyset$ e X são conjuntos fechados.

(ii) A interseção dos elementos de uma coleção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(iii) A união dos elementos de uma coleção finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Definição 2.31 (Vizinhança de um ponto)**.** *Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Diz-se que V e uma vizinhança de x se V for um aberto ao qual $x \in V$.*

Definição 2.32. *Seja X um espaço topológico, A um subconjunto de X e x um elemento de X.*

- *x é um ponto interior a A se existir uma vizinhança de x contida em A. Ao conjunto dos pontos interiores a A chama-se interior de A e designa-se por $int\, A$.*

- *x é um ponto exterior a A se for interior ao seu complementar, isto é, se existir um vizinhança de x contida em $X\backslash A$. Ao conjunto dos pontos exteriores a A chama-se exterior de A e designa-se por $ext\, A$.*

- *x é um ponto fronteiro de A se não for ponto interior a A nem for ponto exterior a A, isto é, se para toda a vizinhança V de x, $V \cap X\backslash A \neq \emptyset$ e $V \cap A \neq \emptyset$. Ao conjunto dos pontos fronteiros de A chama-se fronteira de A e designa-se por ∂A ou $front\, A$.*

- *x é um ponto aderente a A se toda a vizinhança V de x interseta o conjunto A, isto é, se para toda a vizinhança V de x, $V \cap A \neq \emptyset$. Ao conjunto dos pontos aderentes a A chama-se aderência de A ou fecho de A e designa-se por $\overline{A}$.*

Proposição 2.33. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X.*

$$int\, A \subset A \subset \overline{A}\,.$$

Proposição 2.34. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X.*

(i) Os conjuntos $int\, A$, ∂A e $ext\, A$ são disjuntos dois a dois.

(ii) $int\,A \cup \partial A \cup ext\,A = X$.

Proposição 2.35. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X.*

$$int\,A \cup \partial A = \overline{A}\,.$$

Proposição 2.36. *Seja X um espaço topológico e A, B subconjuntos de X.*

(i) *Se $A \subset B$ então $int\,A \subset int\,B$.*

(ii) *Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Teorema 2.37. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *A é um conjunto aberto.*

(ii) *$A = intA$.*

(iii) *$A \cap \partial A = \emptyset$.*

Teorema 2.38. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *A é um conjunto fechado.*

(ii) *$A = \overline{A}$.*

(iii) *$\partial A \subset A$.*

Proposição 2.39. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então:*

(i) *$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$.*

(ii) *A é aberto se e só se $\partial A = \overline{A} - A$.*

(iii) *$\partial A = \emptyset$ se e só se o conjunto A for simultaneamente aberto e fechado.*

(iv) *Se A é aberto então $int(\partial A) = \emptyset$.*

Proposição 2.40. *O interior de um conjunto é a união de todos os conjuntos abertos nele contidos e o fecho de um conjunto é a interseçãoo de todos os conjuntos fechados que o contêm.*

Corolário 2.41. *Seja $A \subset X$. Então $intA$ é um conjunto aberto e $\overline{A}$ é um conjunto fechado.*

Exemplo 2.42. *Seja $Y =]0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $A =]0, \frac{1}{2}] \subset Y$. Notemos que $\overline{A}[0, \frac{1}{2}]$ em $\mathbb{R}$ não coincide com a aderência de A na topologia induzida em Y, $\overline{A}^{Y} =]0, \frac{1}{2}]$.*

Definição 2.43. *Seja X um espaço topológico. Diz-se que X é um espaço de Hausdorff ou um espaço separado, se dados x_1 e x_2 pertences a X, $x_1 \neq x_2$, existirem os abertos disjuntos U_1 e U_2 tais que $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$.*

O teorema que se segue, serve para mostrar um comportamentos dos espaços de Hausdorff. Mais à frente, quando chegarmos ao sub-capítulo dos interiores, exteriores, fronteiras e aderências, voltaremo-nos a deparar com um exemplo de aplicação que é de facto muito parecido com o teorema2.44

Teorema 2.44. *Seja X um espaço topológico. Se X é um espaço de Hausdorff então para todo $x \in X$ o conjunto $\{x\}$ é fechado.*

O exemplo que se segue, serve para aplicar os conceitos de espaços de *Hausdorff* e de projeções canónicas.

Proposição 2.45. *Seja X um espaço topológico. Mostremos que X é um espaço de Hausdorff se e só se o conjunto $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ é um conjunto fechado em $X \times X$.*

Demonstração.

$(\Longrightarrow)$ Suponhamos que X é um espaço de Hausdorff.
Consideremos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, e por hipótese, existem abertos U_1 e U_2 disjuntos tal que

$$x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2.$$

O conjunto $U_1 \times U_2$ é aberto, e vamos mostrar que para $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$ temos

$$U_1 \times U_2 \subset X \times X \backslash \Delta \Leftrightarrow (U_1 \times U_2) \cap \Delta \neq \emptyset.$$

Suponhamos por absurdo, que existe $z \in X$ tal que $(z,z) \in (U_1 \times U_2) \cap \Delta$. Então $z \in U_1 \wedge z \in U_2$, mas isso é absurdo porque U_1 e U_2 são disjuntos. Portanto, $(U_1 \times U_2) \cap \Delta \neq \emptyset \Leftrightarrow X \times X \backslash \Delta$ ser aberto, logo Δ é fechado.

$(\Longleftarrow)$

Mostremos agora o recíproco. Suponhamos que Δ é fechado, isto é, $\Delta^c := X \times X \backslash \Delta$ é aberto. Consideremos $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$, o que implica $(x_1, x_2) \in \Delta^c$. Como Δ^c é aberto em $X \times X$, existem os abertos U, V tais que:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2) \in U \times V \subset \Delta^c &\Leftrightarrow (x_1 \in U \wedge x_2 \in V) \wedge (U \times V) \in \Delta^c \\ &\Leftrightarrow (x_1 \in U \wedge x_2 \in V) \wedge (U \times V) \cap \Delta = \emptyset \\ &\Leftrightarrow (x_1 \in U \wedge x_2 \in V) \wedge (U \cap V) = \emptyset\end{aligned}$$

Portanto, o espaço é de Hausdorff. □

2.6 Funções contínuas

Esta secção vai relacionar as topologias com a continuidade de funções.

Definição 2.46. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é continua se:*

$$\forall V \text{ aberto em } Y \Rightarrow f^{-1}(V) \text{é aberto em } X.$$

Designamos por $C(X,Y)$ o conjundo das funções contínuas definidas em X com valores em Y.

Proposição 2.47. *Se a topologia de Y for dada por uma base $\mathcal{B}$, então na definição de continuidade podemos considerar apenas:*

$$\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \text{é aberto em } X$$

Demonstração. Consideremos $V \subset Y$, V aberto em Y. Então $\exists (B_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{B}$ tal que $V = \bigcup_\alpha B_\alpha$. Assim,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$$
$$\Rightarrow \forall_\alpha f^{-1}(B_\alpha) \subset X$$

Como $f^{-1}(B_\alpha)$ é aberto em X, então $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$ é aberto em X porque é a união de abertos. □

Aparentemente, a noção de contínuidade 2.46 é mais geral, porque estamos a trabalhar num espaço topológico. Mas no próximo capítulo, mais concretemente no teorema 3.29, vamos ver que esta noção de continuidade é equivalente à definição de continuidade usual em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^N$.

Exemplo 2.48. *Consideremos o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, sendo $\mathcal{T}$ a topologia usual e consideremos também o espaço topológico $(\mathbb{R}_l, \mathcal{T}')$, sendo $\mathcal{T}'$ uma topologia gerada pela base:*

$$\mathcal{B}' = \{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$, definida como $f(x) = x$. Será f uma função continua?*
   Seja $B = [a, b[$ um aberto de $\mathbb{R}_l$.

   $$\begin{aligned} f^{-1}(B) = f^{-1}([a, b[) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, b[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [a, b[\} \\ &= [a, b[\end{aligned}$$

   Como $[a, b[$ não é um aberto na topologia usal de $\mathbb{R}$, a função f não é continua.

2. *Seja $g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$, definida como $g(x) = x$. Será g uma função continua?*
   Seja $B =]a, b[$ um aberto de $\mathbb{R}$.

   $$f^{-1}(B) = f^{-1}(]a, b[) =]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b[\in \mathbb{R}_l$$

   Como $]a, b[$ é um aberto em $\mathbb{R}_l$, a função g é contínua.

Proposição 2.49. *Dado um conjunto X com as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$.*
As afirmações seguintes são equivalentes:

- *$\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$: $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$*
- *A função $i : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ é contínua*

Demonstração.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que a função identidade $i : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ é contínua. Mostremos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Sendo U aberto de $\mathcal{T}$, ao aplicar a definição de continuidade temos:

$$U \in \mathcal{T} \Rightarrow i^{-1}(U) \in \mathcal{T}'.$$

Ora,

$$\begin{aligned} i^{-1}(U) &= \{x \in X : i(x) \in U\} \\ &= \{x \in X : x \in U\} = U. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $U = i^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$. Logo $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

($\Longrightarrow$) Agora para demonstrar o recíproco, suponhamos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
Tomamos U aberto em $\mathcal{T}$ e pela definição da imagem inversa temos:

$$\begin{aligned} i^{-1}(U) &= \{x \in X : i(x) \in U\} \\ &= \{x \in X : x \in U\} = U. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}'$, pode-se concluir que $i^{-1}(U) \in \mathcal{T}' \Rightarrow i$ é contínua.

□

Proposição 2.50. *Dados X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *f é contínua.*
2. *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *$\forall B \subset Y$, B é fechado em $Y \Rightarrow f^{-1}(B)$ é fechado em X.*
4. *$\forall x \in X$ $\forall V$ aberto de Y com $y = f(x) \in V$, existe U aberto em X tal que $x \in U$ e $f(U) \subset V$.*

Exemplo 2.51. *Consideremos os conjuntos*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 8x^3 > 2\right\} \text{ e } B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x \geq 3\right\}$$

Mostremos que A é aberto e que B é fechado.

A Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 - 8x^3$ um função contínua, por ser um polinómio. Escolhendo o aberto $]2, +\infty[\in \mathbb{R}$, temos que

$$A = f^{-1}(]2, +\infty[)$$

Concluindo assim, que A é um conjunto aberto, porque $f^{-1}(]2, +\infty[)$ é aberto.

B Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^3 - 7x$ uma função contínua.
Consideremos o fechado $[3, +\infty[$, assim

$$B = g^{-1}([3, +\infty[)$$

Portanto, B é fechado visto que $g^{-1}([3, +\infty[)$ é fechado.

Definição 2.52 (Homeomorfismo)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é um homeomorfismo de X sobre Y se f é bijetiva, continua e $f^{-1} : X \to Y$,função inversa, também for continua. Neste caso, diz-se que X e Y são homeomorfos e designa-se por $X \cong Y$.*

O exemplo seguinte é a aplicação da proposição anterior, onde vamos trabalhar a função identidade juntamente com a continuidade e também vamos usar algumas proposições do capítulo dos conjutnos, nomeadamente sobre a bijetividade e sobre a função inversa.

Corolário 2.53. *Sejam X e X' o mesmo conjunto munido das topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, respetivamente. Seja $i : X' \to X$ a função identidade. Então i é um homeomorfismo se e só se $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.*

Exemplo 2.54. *Sejam X e X' o mesmo conjunto munido das topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, respetivamente. Seja $i : X' \to X$ a função identidade. Consideremos o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ gerado pela base $\mathcal{B}_n$ constituída adicionando à base usual de abertos de $\mathbb{R}$ o conjunto unitário $\{n\}$.*
Mostremos que os espaços $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ são homeomorfos, mas $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

Considerando a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = x + 1.$$

Provemos que φ é sobrejetiva:
Seja $y \in \mathbb{R}$ e definindo $x = y - 1$, tem-se $\varphi(x) = \varphi(y-1) = y - 1 + 1 = y$. Logo é sobrejetiva.
Provemos também que φ é injetiva:
Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Então, φ é injetiva.
Pelo teorema 1.33, φ é invertível e a sua inversa é a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi^{-1}(x) = x - 1$$

Por fim, como φ e φ^{-1} são contínuas, por serem polinómios, concluímos que φ é um homeomorfismo. Portanto, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ são homeomorfos.

Vejamos agora que $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, ou seja, que a função inversa não pode ser a identidade.
Seja $\mathcal{T}_1$ a topologia gerada pelos abertos usuais e pelo o conjunto $\{1\}$ e $\mathcal{T}_2$ a topologia gerada pelos abertos usuais e pelo o conjunto $\{2\}$. Ao considerarmos o conjunto $]0, 1]$, temos que

$$\begin{cases}]0,1] =]0,1[\cup \{1\} \text{ é aberto em } \mathcal{T}_1 \\ ]0,1] \text{ não é aberto em } \mathcal{T}_2, \text{ porque coincide com a topologia de } \mathbb{R} \end{cases}$$

Portanto, temos um conjunto que é aberto numa e não é aberto noutra. Concluindo assim que $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

Proposição 2.55. *Exemplos de funções contínuas:*

1) (Função constante) A função $f : X \to Y$ tal que $f(X) = \{y_0\}$ é contínua.

2) (Inclusão) Dado $A \subset X$, a função $i : A \to X$, definida como $i(x) = x$, é contínua.

3) (Composição) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções continuas, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua.

4) (Restrição do domínio) Dada $f : X \to Y$ contínua e $A \subset X$, a função $f|_A : A \to Y$,onde $x \to f|_A(x) = f(x)$, é contínua.

5) *(Restrição do contra domínio) Dada $f : X \to Y$ continua e seja $Z \subset Y$ tal que $f(x) \subset Z \subset Y$. A função $g : X \to Z$ é contínua.*

6) *Seja $f : X \to Y$ e $X = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ com $\{V_\alpha\}$ coleção de conjuntos abertos em X. Se $f|_{V_\alpha}$ é contínua $\forall_\alpha$, então f é contínua.*

7) *(Projeção) As funções projeções, $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$, são funções contínuas.*

8) *Seja $f : A \to X \times Y$. A função f é contínua se e só se $f_1 : A \to X$ e $f_2 : A \to Y$ são contínuas.*

Exemplo 2.56. *Sejam X, Y espaços topológicos e Y um espaço de Hausdorff. Consideremos $A \subset X$ e $f : A \to Y$ uma função contínua. Mostremos que se f admite um prolongamento contínuo a $\overline{A}$, então esse prolongamento é único.*

Sejam f_1 e f_2 prolonagamentos contínuos de f a $\overline{A}$, isto é,

$$f_1 : \overline{A} \to Y, \text{ onde } f_1|_A(x) = f(x)$$
$$f_2 : \overline{A} \to Y, \text{ onde } f_2|_A(x) = f(x)$$

Consideremos também o seguinte conjunto:

$$\mathcal{C} = \left\{x \in \overline{A} : f_1(x) = f_2(x)\right\},$$

e deste sabemos que $A \subset \mathcal{C} \subset \overline{A}$, porque:

($A \subset \mathcal{C}$) Seja $x \in A$, $f_1(x) = f(x) \wedge f_2(x) = f(x)$, logo $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x \in \mathcal{C}$

($\mathcal{C} \subset \overline{A}$) Pela definição do conjunto $\mathcal{C}$ sabemos que $\mathcal{C} \subset \overline{A}$.

Definamos agora o seguinte conjunto:

$$\Delta = \{(z, z) : z \in Y\} \subset Y \times Y,$$

onde Δ é fechado porque Y é um espaço de Hausdorff, pela proposição 2.45. Tomemos uma função $g : \overline{A} \to Y \times Y$, definida como $g(x) = (f_1(x), f_2(x))$, que é contínua pela proposição 2.55.8).
Ao aplicar a imgem inversa de g no conjunto Δ, temos que:

$$\begin{aligned} g^{-1}(\Delta) &= \left\{x \in \overline{A} : g(x) \in \Delta\right\} \\ &= \left\{x \in \overline{A} : (f_1(x), f_2(x)) \in \Delta\right\}. \end{aligned}$$

Agora podemos usar a definição do conjunto $\mathcal{C}$, e assim temos que:

$$g^{-1}(\Delta) = \left\{x \in \overline{A} : f_1(x) = f_2(x)\right\} = \mathcal{C}.$$

Logo, $\mathcal{C}$ é fechado pela proposição 2.50.3), ou seja, $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$. Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} A \subset \mathcal{C} \subset \overline{A} &\implies A \subset \mathcal{C} \wedge \mathcal{C} \subset \overline{A} \\ &\implies \overline{A} \subset \overline{\mathcal{C}} = C \wedge \overline{\mathcal{C}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \\ &\implies \overline{A} \subset \mathcal{C} \wedge \mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \subset \overline{A} \\ &\implies \mathcal{C} = \overline{A}. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall x \in \overline{A}\ f_1(x) = f_2(x)$.

Capítulo 3

Espaços Métricos

Neste capítulo, são apresentadas várias distâncias/métricas e de seguida alguns exemplos, teoremas e propriedades associados às mesmas.
Passamos assim, para o subcapítulo da Topologia de um Espaço Métrico, onde vamos definir o conceito de Bola aberta, ver a relação entre topologias, outras afirmações e exemplos. Acabamos esse subcapítulo com um exemplo de um subconjunto que é aberto para uma determinada métrica, mas não é para outra.
Depois, vamos para o subcapítulo das Sucessões e Continuidade. Aqui vemos novas caracterizações da noção de continuidade de funções, bem como a influência de várias métricas.
Por fim, temos o subcapítulo referente aos Espaço Métricos Completos. Iremos falar de sucessões de Cauchy e as suas propriedades, bem como a convergência de funções. E vamos acabar este capítulo com um exemplo de uma sucessão de Cauchy num espaço métrico não completo.

3.1 Métrica

Definição 3.1 (Métrica)**.** *Seja X um conjunto qualquer. Chamamos métrica (ou distância) em X a toda a função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que a cada par ordenado (x, y) associa um número real, que designamos por $d(x, y)$ e a que chamamos distância de x a y, tal que*

1. $\forall_{x,y \in X} \quad d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall_{x,y \in X} \quad d(x, y) = d(y, x)$.
3. $\forall_{x,y,z \in X} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Chamamos espaço métrico ao par ordenado (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X. Frequentemente, no caso de não haver dúvidas quanto à métrica usada, designamos apenas por X ou X_d o espaço métrico (X, d).
Os exemplos e proposições que se seguem são resultados clássicos e as suas demonstrações encontram-se no livro de *Erwin Kreyszig* [2].

Exemplo 3.2. *Num conjunto X, a função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica em X, chamada de métrica discreta.

Exemplo 3.3. *No conjunto $\mathbb{R}^n$, são exemplos de métricas as funções definidas por:*

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \,.$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2} \,.$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} \,.$$

Em geral, para todo $p \in [1, +\infty[$, a função $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.4. *Sejam $p, q \in]1, +\infty[$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) (Desigualdade de Young) Para quaisquer $a, b \in [0, +\infty[$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \,.$$

(b) (Desigualdade de Holder) Para quaisquer elementos de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \,.$$

(c) (Desigualdade de Minkowski) Para quaisquer elementos de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \,.$$

(d) A função $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

Os resultados da proposição 3.4 podem ser generalizados aos seguintes espaços de sucessões:

Definição 3.5. *Seja $p \in [1, +\infty[$. Designamos por $\ell^p(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as sucessões (x_n), de termos em $\mathbb{R}$, tais que a serie $\sum_n^{+\infty} |x_n|^p$ converge, isto é, o conjunto assim definido:*

$$\ell^p(\mathbb{R}) = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

Exemplo 3.6. *O conjunto* $\ell^2(\mathbb{R})$ *definido por*

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

munido da função $d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^2$ *é um espaço métrico.*

Exemplo 3.7. *No conjunto* $C([0,1])$ *de todas as funções contínuas definidas no intervalo* $[0,1]$ *com valores em* $\mathbb{R}$*, são exemplos de métricas as funções definidas por:*

$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$.

$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f-g|^2}$.

$d_\infty(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$.

Em geral, para todo $p \in [1, +\infty[$ *, a função* $d_p : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$d_p(f,g) = \sqrt[p]{\int_0^1 |f-g|^p}$$

é uma métrica em $C([0,1])$*.*

Definição 3.8. *Seja* (X,d) *um espaço métrico e* $A \subset X$*. Diz-se que* A *é um conjunto limitado se existir um real positivo* C *tal que*

$$\forall_{x,y\in A} \quad d(x,y) \leq C\,.$$

Definição 3.9. *Seja* X *um conjunto qualquer,* (Y, d_Y) *um espaço métrico e* $f : X \to Y$ *uma função.*
Diz-se que f *é limitada se* $f(X)$ *for um conjunto limitado. Designamos por* $B(X,Y)$ *o conjunto das funções limitadas definidas em* X *com valores em* Y *e por* $C_b([X,Y])$ *o conjunto das funções contínuas e limitadas em* X *com valores em* Y*, isto é,*

$$C_b(X,Y) = B(X,Y) \cap C(X,Y).$$

Exemplo 3.10. *Seja* X *um conjunto qualquer e* (Y, d_Y) *um espaço métrico. No conjunto* $B(X,Y)$*, a função* d *definida por*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$$

é uma métrica.

3.2 Topologia de um espaço métrico

Definição 3.11 (Bola aberta)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $\epsilon \in]0, +\infty[$. Chamamos bola aberta de raio ϵ centrada em a ao conjunto que designamos por $B_d(a, \epsilon)$ assim definido:*

$$B_d(a, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

Vejamos agora exemplos de bolas abertas em $\mathbb{R}^2$, usando diferentes métricas:

Exemplo 3.12. *Para aplicarmos as métricas definidas no exemplo 3.3, vamos então representar as bolas em $\mathbb{R}^2$ centradas no ponto $(0, 0)$ com raio 1, usando diferentes métricas.*

- *Em $\mathbb{R}^2$, $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Assim a bola aberta de raio 1 centrado em $(0, 0)$ com métrica d_1 é definida por:*

$$\begin{aligned} B_{d_1}((0,0),1) &= \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(0,0)) < 1\} \\ &= \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : |x-0| + |y-0| < 1\} \\ &= \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\} \end{aligned}$$

Para ajudar a representação geométrica, vejamos as possibilidades de $|x| + |y| < 1$:

$$|x| + |y| < 1 = \begin{cases} x \geq 0 \wedge y \geq 0 \implies x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - x \\ x \geq 0 \wedge y \leq 0 \implies x + (-y) < 1 \Leftrightarrow y > 1 - x \\ x \leq 0 \wedge y \geq 0 \implies -x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 + x \\ x \leq 0 \wedge y \leq 0 \implies -x - y < 1 \Leftrightarrow y > -1 - x \end{cases}$$

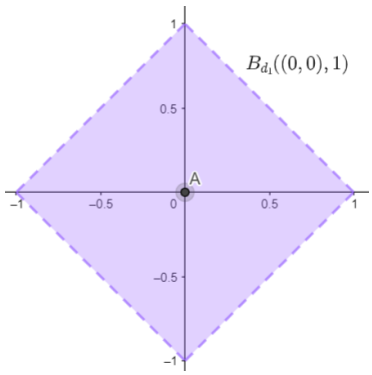


Figura 3.1: Bola aberta de raio 1 centrada em $(0, 0)$ com a métrica d_1.

- *Em $\mathbb{R}^2$, $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$.*
  Com esta métrica, obtemos o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned} B_{d_2}((0,0),1) &= \{(x,y)\mathbb{R}^2 : d_2((x,y),(0,0)) < 1\} \\ &= \{(x,y)\mathbb{R}^2 : \sqrt{|x-0|^2 + |y-0|^2} < 1\} \\ &= \{(x,y)\mathbb{R}^2 : |x|^2 + |y|^2 < 1\} \end{aligned}$$

Com a bola B aberta de raio 1 centrado em $(0, 0)$ definida, temos a seguinte representação geométrica:

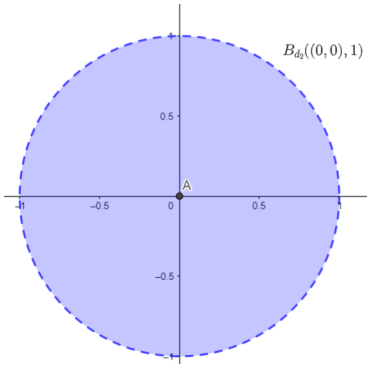


Figura 3.2: Bola aberta de raio 1 centrada em $(0,0)$ com a métrica d_2.

- *Em* $\mathbb{R}^2$, $d\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$.
  A bola B *aberta de raio* 1 *centrado em* $(0,0)$, *com a métrica* d_∞, *é definida por:*

$$\begin{aligned} B_{d_\infty}((0,0),1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x,y),(0,0)) < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-0|,|y-0|\} < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} < 1\} \end{aligned}$$

  Portanto, a representação geométrica é:

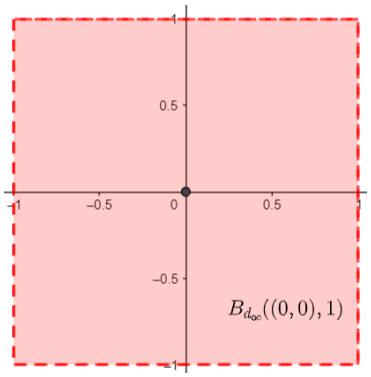


Figura 3.3: Bola aberta de raio 1 centrada em $(0,0)$ com a métrica d_∞.

Com este exemplo, podemos perceber que a forma das bolas, em $\mathbb{R}^2$, muda consoante a métrica usada. Assim, quando $p \to \infty$, a bola parte de um quadrado inscrito numa circunferência e tende para um quadrado no qual a circunferência está inscrita, como é possível observar na figura 3.4.

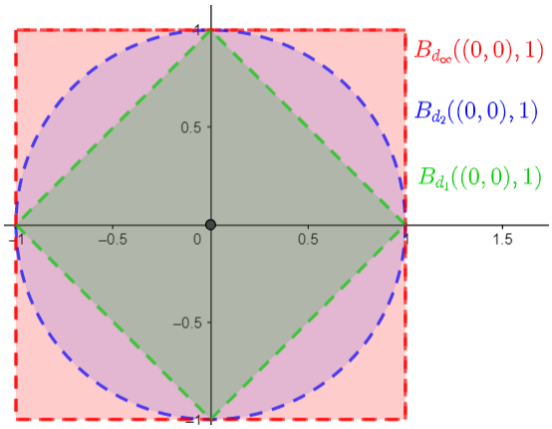


Figura 3.4: Bolas abertas de raio 1 centradas em $(0,0)$ para várias métricas em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3.13. *Seja (X, d) um espaço métrico e $B_d(x, \epsilon)$ uma bola aberta de raio ϵ centrada em $x \in X$. Para todo $y \in B_d(x, \epsilon)$ existe uma bola aberta $B_d(y, \delta)$ contida em $B_d(x, \epsilon)$.*

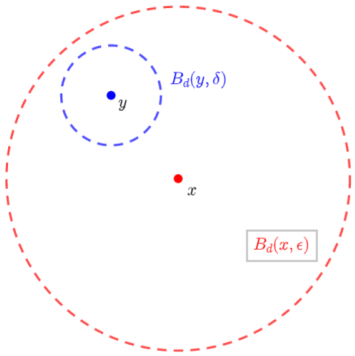


Figura 3.5: Uma bola centrada em y contida numa bola centrada em x.

Demonstração. Seja $y \in B(x, \epsilon)$. Mostremos que existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$. Consideremos $\delta = \epsilon - d(x, y)$ e $z \in B(y, \delta)$. Pela definição de Bola aberta, temos que

$$z \in B(y, \delta) \Leftrightarrow d(z, y) < \delta.$$

Usando a propriedade triângular de uma métrica, concluimos que

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) \\ &< \delta + d(y, x) \\ &= \epsilon - d(x, y) + d(y, x) = \epsilon \end{aligned}$$

Ora, isto significa que $z \in B(x, \epsilon)$ □

A proposição 3.13 mostra que a bola aberta definida em 3.11 é de facto um conjunto aberto.

Proposição 3.14. *Seja (X, d) um espaço métrico. A coleção*

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, \epsilon) \, : x \in X, \, \epsilon \in]0, +\infty[\,\},$$

é uma base topológica.

Definição 3.15 (Topologia definida pela métrica)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico. Chamamos topologia definida em X pela métrica d à topologia gerada pela coleção das bolas abertas $B_d(x, \epsilon)$, para todo $x \in X$ e $\epsilon \in]0, +\infty[$.*

Teorema 3.16. *Todo o espaço métrico (com a topologia definida pela métrica) é um espaço de Hausdorff.*

Dem. Seja (X, d) um espaço métrico e x_1 e x_2 pontos distintos de X. Definindo $\delta = d(x_1, x_2)/2$, suponhamos, por absurdo, que existe $x \in B_d(x_1, \delta) \cap B_d(x_2, \delta)$. Então,

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < \delta + \delta = d(x_1, x_2)\,,$$

o que é absurdo. □

Teorema 3.17. *Seja X um conjunto e sejam d e d' métricas em X que definem as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ respetivamente, onde: São equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ *($\mathcal{T}'$ é mais fina do que $\mathcal{T}$);*

ii) $\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ \mathcal{B}_{d'}(x, \delta) \subset \mathcal{B}_d(x, \epsilon)$;

iii) $\forall x, y \in X\ \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ d'(x, y) < \delta \implies d(x, y) < \epsilon$

Apresentemos agora uma proposição 3.18 é mais forte do que este teorema 3.17. A única contra-partida, é o facto de passarmos a ter uma implicação em vez de uma equivalência.

Proposição 3.18. *Seja X um conjunto e sejam d e d' métricas em X.*
Se existir um $C > 0$, para o qual

$$\forall x, y \in X,\ d(x, y) \leq C d'(x, y),$$

então a topologia definida pelo métrica d' é mais fina do que a topologia definida pela métrica d.

Exemplo 3.19. *Consiremos quaisquer duas funções f e g que pertençam ao espaço das funções continuas $C([0, 2])$ e vamos ter em conta que as distâncias $d_1(f, g)$ e $d_\infty(f, g)$ para concluirmos que a topologia definida pela métrica d_∞ é mais fina do que a topologia definida pela métrica d_1.*

Comecemos por usar a definição da métrica d_1 para estimar a distância entre f e g:

$$\begin{aligned} d_1(f, g) = \int_0^2 |f - g| &\leq \int_0^2 \max_{x \in [0,2]} |f(x) - g(x)| dt \\ &= \max_{x \in [0,2]} |f(x) - g(x)| \int_0^2 1 dt \\ &= 2 \times \max_{x \in [0,2]} |f(x) - g(x)| \\ &= 2 d_\infty(f, g) \end{aligned}$$

Concluímos que $d_1(f, g) \leq 2 d_\infty(f, g)$. Consequentemente, concluímos que a topologia definida pela métrica d_∞ é mais fina do que a topologia definida pela métrica d_1.

Definição 3.20 (Métricas equivalentes)**.** *Seja X um conjunto e sejam d e d' métricas em X. As métricas d e d' dizem-se equivalentes se definirem a mesma topologia em X, o que significa que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ positivos tais que*

$$\alpha\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta\, d(x, y)\,.$$

Definição 3.21. *Diz-se que o espaço topológico X é metrizável se existir uma métrica em X que define a topologia de X.*

Exemplo 3.22. *Representemos geometricamente a bola de $C([0,2\pi])_{d_\infty}$ centrada na função $t \mapsto sen(t)$, com raio 1. Averiguemos se a função $t \mapsto cos(t)$ pertence à bola representada.*

Sejam $f, g : [0,2\pi] \to [-1,1]$, definidas por $f(t) = sent(t)$ e $g(t) = sen(t) + \frac{1}{2}$.
Comecemos por entender o comportamento $B_{d_\infty}(f,1)$ com a função g para sabermos se $g \in B_{d_\infty}(f,1)$:

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \max_{t\in[0,2\pi]}\{|sin(t) - sin(t) - \frac{1}{2}| < 1\} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Portanto a função g pertence a $B_{d_\infty}(f,1)$. A representação geométrica pode ser observada na figura 3.6.

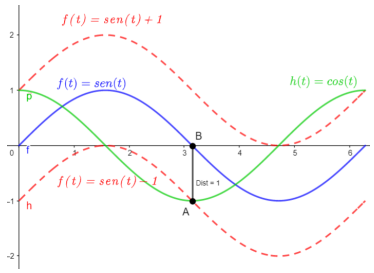


Figura 3.6: Gráfico da função g e bola aberta centrada na função f.

Vejamos agora se a função $h : [0,2\pi] \to [-1,1]$, definida por $h(t) = cos(t)$, pertence a $B_{d_\infty}(f,1)$ e para isso determinemos $d_\infty(f,h)$.

$$\begin{aligned} d_\infty(f,h) &= \max_{t\in[0,2\pi]}\{|sen(t) - cos(t)|\} \\ &\geq |sen(\frac{\pi}{2}) - cos(\frac{\pi}{2})| = 1 \end{aligned}$$

Como $d_\infty(f,h) \geq 1$, podemos concluir que a função h não pertence à bola centrada em f de raio 1 com a métrica d_∞.

Exemplo 3.23. *Consideremos o subconjunto U do espaço de funções $C([0,1])$ definido por*

$$U = \{f \in C([0,1]) : f(t) > 0, \forall t \in [0,1]\}.$$

O subconjunto U é um aberto da topologia definida pela métrica d_∞ mas não é um aberto da topologia definida pela métrica d_1

Confirmemos estas duas afirmações:

- *Queremos mostrar que U é aberto com a métrica d_∞, ou seja,*

$$\begin{aligned} &\forall f \in U\ \exists \epsilon > 0 : B(f,\epsilon) \subset U \\ &\forall f \in U\ \exists \epsilon > 0 : \forall_g,\ g \in B(f,\epsilon) \Rightarrow g \in U \\ &\forall f \in U\ \exists \epsilon > 0 : \forall_g,\ d_\infty(g,f) < \epsilon \Rightarrow \forall_{t\in[0,1]}\, g(t) > 0 \\ &\forall f \in U\ \exists \epsilon > 0 : \forall_g,\ \max_{t\in[0,1]}\{|g(t) - f(t)|\} < \epsilon \Rightarrow \forall_{t\in[0,1]}\, g(t) > 0 \end{aligned}$$

Seja $f \in U \Leftrightarrow \forall_{t\in[0,1]},\ f(t) > 0$.
Como f é contínua no intervalo $[0,1]$, o teorema de Weierstrass garante que f tem um

máximo e um mínimo em $[0,1]$.
Considermos $m = \min_{t\in[0,1]} f(t)$ *e escolhemos* $\epsilon = m$.

$$\begin{aligned} g \in B_{d_\infty}(f,m) &\Leftrightarrow \max_{t\in[0,1]}\{|f(t)-g(t)|\} < m \\ &\Leftrightarrow \forall_{t\in[0,1]}\ |f(t)-g(t)| < m \\ &\Leftrightarrow \forall_{t\in[0,1]} -m < f(t)-g(t) < m \\ &\Leftrightarrow \forall_{t\in[0,1]} m > g(t)-f(t) > -m \\ &\Leftrightarrow \forall_{t\in[0,1]} -m < -f(t)+g(t) < m \\ &\Leftrightarrow \forall_{t\in[0,1]}\ f(t)-m < g(t) < f(t)+m \end{aligned}$$

Como $m = \min_{t\in[0,1]} f(t)$, *então* $\forall_{t\in[0,1]} f(t) \geq m$, *e também sabemos que* $\forall_{t\in[0,1]} g(t) > f(t)-m$.
Portanto, $\forall_{t\in[0,1]}$, $g(t) > f(t)-m \Rightarrow g(t) > m-m = 0$.

- *Mostremos agora que* U *não é aberto da topologia definida pela métrica* d_1 *no conjunto* $C([0,1])$.
  Seja $f \in U$, *onde* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(t) = 1$, *e* $0 \leq t \leq 1$.
  Consideremos $g_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ *a função contínua definida por*

$$g_\epsilon = \begin{cases} \frac{t}{\epsilon},\ 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1, \epsilon < t \leq 1 \end{cases}$$

  Ora, calculando a distância entre f *e* g_ϵ *temos:*

$$d_1(f,g_\epsilon) = \int_0^1 |f(t)-g_\epsilon(t)|dt = \int_0^\epsilon |1-\frac{t}{\epsilon}|dt + \int_\epsilon^1 |1-1|dt = \frac{\epsilon}{2}$$

  Portanto, para qualquer $0 < \epsilon < 1$, *esta função* g_ϵ *vai pertencer à bola* $B_{d_1}(f,\epsilon)$, *mas o problema está no facto de* $g_\epsilon \notin U$ *dado* g_ϵ *não ser estritamente positiva.*
  Ou seja, a função f *não é um ponto interior a* U *para a métrica* d_1.

3.3 Sucessões e continuidade

Definição 3.24 (Sucessão)**.** *Sendo* X *um conjunto qualquer, uma sucessão de termos em* X, *ou apenas uma sucessão em* X, *é uma função de* $\mathbb{N}$ *em* X, $n \mapsto x_n$. *É habitual designar uma sucessão* x *em* X *por* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou apenas por* (x_n).

Definição 3.25 (Sucessão convergente)**.** *Seja* (x_n) *uma sucessão num espaço métrico* (X,d) *e* $a \in X$. *Diz-se que a sucessão* (x_n) *converge ou tende para* a *se*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{p\in\mathbb{N}} :\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \implies d(x_n,a) < \epsilon\,.$$

Neste caso, diz-se que a sucessão (x_n) *é convergente e que* a *é o limite da sucessão* (x_n), *escrevendo-se* $x_n \to a$.

Proposição 3.26. *Seja* (x_n) *uma sucessão convergente num espaço métrico* X. *Então, a sucessão* (x_n) *converge para um único ponto de* X.

Teorema 3.27 (Ponto aderente). *Seja (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$ e $a \in X$. a é um ponto aderente ao conjunto A se e só se existir uma sucessão (x_n) de termos em A tal que $x_n \to a$.*

Teorema 3.28 (Conjunto fechado). *Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. A é um conjunto fechado se e só se o limite de toda sucessão convergente de termos em A pertence a A.*

No contexto de espaços métricos, a continuidade de uma função definida em 2.46, pode assumir as seguintes formas.

Teorema 3.29. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. São equivalentes as seguintes afirmações:*

a) f é contínua, isto é, $\forall V \, aberto \, de \, Y \implies f^{-1}(V)$ é aberto em X.

b) (continuidade $\epsilon - \delta$) $\forall_{a \in X} \quad \forall_{\delta > 0} \quad \exists_{\epsilon > 0} : \forall_{x \in X} \quad d_X(x, a) < \epsilon \implies d_Y(f(x), f(a)) < \delta$.

c) (continuidade de Heine) $\forall_{x \in X} \, \forall (x_n) \subset X : x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$

Notemos que a ordem pela qual os quantificadores estão escritos é relevante. A exemplo disso, segue-se a seguinte definição:

Definição 3.30 (Continuidade uniforme). *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Diz-se que f é uniformemente contínua se*

$$\forall_{\delta > 0} \quad \exists_{\epsilon > 0} \quad \forall_{x, y \in X} \quad d_X(x, y) < \epsilon \implies d_Y(f(x), f(y)) < \delta \, .$$

Exemplo 3.31. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$. A função f é contínua mas não uniformente contínua.*

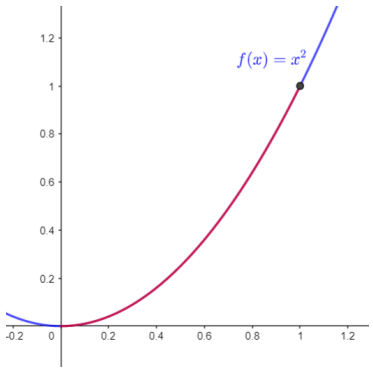


Figura 3.7: Gráfico de f.

Seja $\delta > 0$.
Suponhamos, com vista a um absurdo, que f é uniformente contínua, isto é, que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}} \, |x - y| < \epsilon \implies |x^2 - y^2| < \delta.$$

Ao escolhermos $y = x + \frac{\epsilon}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} |x - y| < \epsilon &\implies |x - x - \frac{\epsilon}{2}| < \epsilon \\ &\implies \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|x^2 - y^2| = \left|x^2 - \left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)^2\right| = \left|x^2 - \left(x^2 + \epsilon x + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\right|$$
$$= x\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}$$

Portanto, escolhendo x tal que $x\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} > \delta$, isto é,

$$x > \frac{\delta - \frac{\epsilon^2}{4}}{\epsilon},$$

concluímos que $|x^2 - y^2| \geq \delta$ o que é absurdo. Isso mostra que f não é uniformente contínua.
NOTA: Se o domínio da função fosse o intervalo $[0,1]$, a função seria uniformente contínua.

O exemplo que se segue, apresenta uma demonstração alternativa, no espaço $C([0,1])$, da topologia definida métrica d_∞ ser mais fina do que a topologia definida pela métrica d_1.

Exemplo 3.32. *Mostremos que a função identidade $id : C([0,1])_{d_\infty} \to C([0,1])_{d_1}$ é contínua.*

E para isso, temos de usar o teorema 3.29, ou seja, para toda a função $f \in C([0,1])$ e todo $\delta > 0$ vai existir $\epsilon > 0$, para todo $g \in C([0,1])$, tais que

$$d_\infty(f,g) < \epsilon \implies d_1(id(f), id(g)) < \delta$$
$$\Leftrightarrow \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| < \epsilon \implies \int_0^1 |f - g| < \delta.$$

Como cálculo auxiliar:

$$\forall_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$
$$\implies \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \int_0^1 \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|dx$$
$$\implies \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$
$$\implies d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g)$$

Logo, ao escolhermos $\epsilon = \delta$ temos que

$$d_\infty(f,g) < \delta \implies d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g) < \delta.$$

Este exemplo tem o seu lado interessante, pois está relacionado com a proposição 3.18. Ou seja, além de provarmos que a função identidade é contínua, também mostrámos que $\forall_{f,g\in C([0,1])} d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g)$. Portanto, $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$.

Exemplo 3.33. *Vamos estudar a continuidade de algumas funções:*

a) $I : C([0,1])_{d_\infty} \to \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \int_0^1 f$.
Consideremos duas funções $f, g \in C([0,1])$, pela definição de continuidade em I temos que

$$\forall_{\delta>0}\exists_{\epsilon>0} : d_\infty(f,g) < \epsilon \implies d(I(f), I(g)) < \delta$$
$$\Leftrightarrow \forall_{\delta>0}\exists_{\epsilon>0} : \max_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon \implies \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx\right| < \delta \tag{3.3.1}$$

Pelas propriedades dos integrais, temos que:

$$\left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

e por outro lado, sabemos que

$$|f(x) - g(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Portanto,

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \int_0^1 \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| dx.$$

Voltanto à implicação (3.3.1) e escolhendo $\epsilon = \delta$ temos que:

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < \delta \implies \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < \delta$$

Concluindo assim que I é contínua.

b) $d : C([0,1])^1_{d_\infty} \to C([0,1])_{d_\infty}$ *definida por* $d(f) = f'$.
Seja $f \in C^1([0,1])_{d_\infty}$ uma função arbitrária. Apliquemos a definição de continuidade de Heine 3.30.c) à função d em f, ou seja,

$$\forall_{(f_n) \subset C^1([0,1])_{d_\infty}}, f_n \to f \implies d(f_n) \to d(f),$$

isto é,

$$\forall_{(f_n) \subset C^1([0,1])_{d_\infty}}, d_\infty(f_n, f) \to 0 \implies d_\infty(f_n', f') \to 0.$$

Consideremos $f_n : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(t) = \frac{1}{n}.sen(nt)$, com $n \in \mathbb{N}$. Fixando t, temos que $f_n(t) \to 0$, pelo facto de $f_n(t)$ ser o produto de um infinitésimo com uma sucessão limitada.
Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função nula. Comecemos por verificar que $d_\infty(f_n, f) \to 0$:

$$d_\infty(f_n, f) = \max_{t \in [0,1]} \{|f_n(t) - f(t)|\} = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{n}.sen(nt) \right| = \frac{1}{n} \max_{t \in [0,1]} |sen(nt)| \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

quando $n \to \infty$, o que significa que $d_\infty(f_n, f) \to 0$.
Determinemos agora

$$d_\infty(f_n', f') = d_\infty(cos(nt), 0) = \max_{t \in [0,1]} |cos(nt)|$$

Portanto, se tomarmos $t = 0$ temos:

$$d_\infty(f_n', f') \geq |cos(0)| = 1 \not\to 0$$

concluindo assm que a função $d(f) = f'$ não é contínua.

Teorema 3.34. *Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$. Seja $a \in X$, f é contínua no ponto a se e só se para toda a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em x convergir para a, a sucessão $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em Y converge para $f(a)$.*

$$f \text{ é contínua em } a \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to a \Rightarrow f(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to f(a))$$

Exemplo 3.35. *Consideremos a sucessão $(x_n) \subset C([0,1])$ de termo geral $x_n(t) = ne^{-n^2t}$. Vejamos se a sucessão (x_n) é convergente, para a métrica d_∞ e para a métrica d_1.*

(d_∞) Mostremos que a sucessão (x_n) não é limitada, isto é, mostremos que para todo o $C > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} d_\infty(x_n, a) &= \max_{t\in[0,1]} |n.e^{-n^2t}| \\ &= n \max_{t\in[0,1]} |e^{-n^2t}| \\ &= n \geq C. \end{aligned}$$

Logo, como para qualquer $C > 0$ vai existir um $n \geq C$ e assim podemos concluir que a sucessão não é limitada, e consequentemente não é convergente.

(d_1) Mostremos que para todo o $\epsilon > 0$, vai existir $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \implies d_1(x_n, 0) < \epsilon.$$

Determinemos agora um p para mostrar que (x_n) é convergente.
Para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} d_1(x_n, 0) &= \int_0^1 |n.e^{-n^2t} - 0|dt = \int_0^1 n.e^{-n^2t}dt \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 n^2.e^{-n^2t}dt \\ &= \frac{1}{n}(1 - e^{-n^2}) = \frac{1}{n} - \frac{e^{-n^2}}{n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos $p \geq \frac{1}{\epsilon}$ temos que $x_n \to 0$ em $C([0,1])$ com a métrica d_1.

3.4 Espaços métricos completos

Vamos assim concluir o capítulo com esta secção que vai definir as sucessões de Cauchy e por consequência o espaço métrico completo.

Definição 3.36. *Seja (X, d_X) um espaço métrico e seja (x_n) uma sucessão de termos em X. Diz-se que a sucessão (x_n) é uma sucessão de Cauchy se*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{p\in\mathbb{N}}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq p \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Teorema 3.37. *Num espaço métrico, toda a sucessão de Cauchy é limitada.*

Teorema 3.38. *Seja (X, d_X) um espaço métrico. Toda a sucessão convergente é uma sucessão de Cauchy.*

Vejamos agora a definição de espaço completo e um teorema sobre o mesmo.

Definição 3.39. *Diz-se que o espaço métrico X é completo se toda a sucessão de Cauchy for convergente.*

Teorema 3.40. *Seja X um espaço métrico completo e $Y \subset X$.*
Y é fechado em X se e só se Y for completo.

Definição 3.41. *Seja X um conjunto qualquer e (Y, d_Y) um espaço métrico. Seja (f_n) um sucessão de funções definidas em X com valores em Y. Seja $f : X \to Y$ uma função.*

- *Diz-se que f_n converge pontualmente para f se,*

$$\forall_{x\in X}\ \forall \epsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq p \Rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

- *Diz-se que f_n converge uniformente para f se*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} : \forall x \in X\, \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq p \Rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

Teorema 3.42. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e seja d a métrica no conjunto $B(X, Y)$ definida por*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} \{d_Y(f(x), g(x))\}.$$

São equivalentes as seguintes afirmações:

i. O espaço métrico (Y, d_Y) é completo.

ii. O espaço métrico $(B(X, Y), d_\infty)$ é completo.

iii. O espaço métrico $(C_b(X, Y), d_\infty)$ é completo.

Demonstração de i) $\implies$ ii). Nesta demonstração apenas iremos mostrar a implicação do ponto *i)* para o ponto *ii)*. Seja $(x_n) \subset B(X, Y)$ uma sucessão de Cauchy.
Vamos dividir a resolução em dois passos:

1º passo: definimos um candidato a limite $(f_n)_n$;

2º passo: mostrarmos que $(f_n)_n$ converge para f no espaço $(B(X, Y), d_\infty)$.

Vamos então construir a função $f : X \to Y$, de modo a que f seja o limite de $(f_n)_n$ e que pertença a $B(X, Y)$.
Se fixarmos o $x \in X$, vamos ter uma sucessão de Cauchy, e por hipótese, dado que Y é completo, $(f_n(x))_n$ vai convergir para $f(x) \in Y$. E assim, finalizamos o primeiro passo definindo

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = y = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Conhecendo o candidato a limite, prosseguimos para a convergência de $(f_n)_n$ em $(B(X, Y), d_\infty)$.
Seja $\epsilon > 0$ e $0 < \epsilon' < \epsilon$,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq p \implies d_\infty(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Usando o facto de $(f_n)_n$ ser uma sucessão de Cauchy, temos que

$$\exists p \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq p \implies \forall x \in X\, d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon'$$

e também sabemos que $f_m(x) \to f(x)$. Fazendo $m \to \infty$, temos:

$$\begin{aligned} &\exists p \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq p \implies \forall x \in X \, d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon' < \epsilon \\ &\implies \exists p \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq p \implies d_\infty(f(x), f_n(x)) < \epsilon \\ &\implies (f_n)_n \to f, \text{ em } (B(X,Y), d_\infty) \end{aligned}$$

Portanto, provámos assim a convergência de f em $(B(X,Y), d_\infty)$.

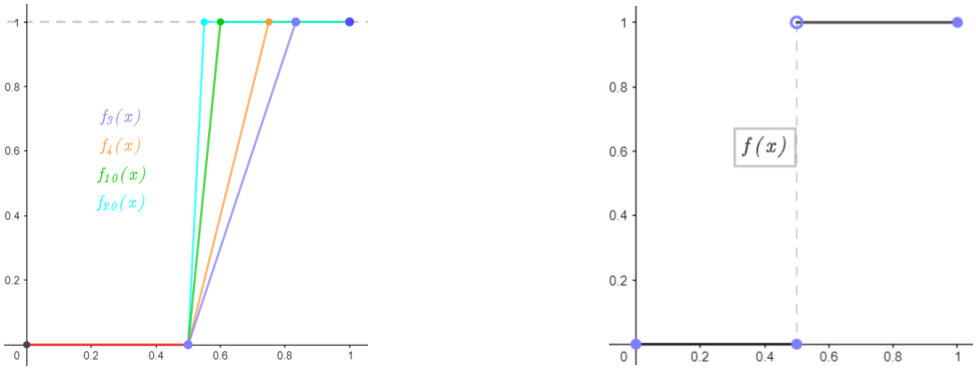
□

Para aplicarmos os teoremas e as propriedades dos espaços completos, vamos então seguir o exemplo que se segue.

Exemplo 3.43. *Consideremos a seguinte sucessão, onde $n > 2$:*

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, \ t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right), \ t \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right[\\ 0, \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Para uma melhor interpretação do comportamento desta sucessão de funções, observemos a figura 3.8.



(a) (b)

Figura 3.8: *a)* Gráfico das funções, com $n = \{3, 4, 10, 20\}$. *b)* Gráfico da função f.

Desta sucessão, vamos verificar que (f_n) é uma sucessão de Cauchy no espaço $C([0,1])_{d_1}$ e que o espaço $C([0,1])_{d_1}$ não é completo.

- *Comecemos por ver que (f_n) é uma sucessão de Cauchy. Então:*
  Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, tais que:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{p \in \mathbb{N}} : \forall_{m,n \in \mathbb{N}} m, n \geq p \implies d_1(x_n, x_m) < \epsilon.$$

  Para mostrar esta afirmação, vamos determinar $d_1(x_n, x_m)$.

$$d_1(x_n, x_m) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} m(t - \frac{1}{2}) - n(t - \frac{1}{2})dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 1 - n(t - \frac{1}{2})dt.$$

  E fazendo os cálculos, acabamos por chegar à seguinte conclusão:

$$d_1(x_n, x_m) = \frac{m-n}{2mn} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}$$

Para determinar p: Sabemos que $m > n > p$ *e por isso* $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{p}$.
Como $d(x_n, x_m) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} < \epsilon$ *então*

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2p} < \epsilon.$$

Se $p > \frac{1}{2\epsilon}$ *então* $m > n > p > \frac{1}{2\epsilon}$.
Portanto,

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} < \frac{1}{2n} < \epsilon.$$

Concluindo que a sucessão (f_n) *é uma sucessão de Cauchy.*

- *Passemos para a segunda parte do exemplo, isto é, mostrar que a sucessão* (f_n) *não é convergente em* $C([0,1])$. *Para isso, basta observar que a sucessão* (f_n) *não converge em* d_1 *para uma função contínua.*
Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 0, t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é o limite pontual de (f_n)

$$d_1(f_n, f) = \int_0^{\frac{1}{2}} |0 - 0| dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |n\left(t - \frac{1}{2}\right) - 1| dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - 1| dt = \frac{1}{2n} \to 0$$

Logo $d_1(f_n, f) \to 0$, *consequentemente,* $f_n \to f$ *na métrica* d_1.
No entanto, f *não é contínua então* $f \notin C([0,1])$. *Por isso,* (f_n) *não é convergente no espaço* $C([0,1])_{d_1}$.

Capítulo 4

Espaços Conexos

Os espaços conexos, são espaços que não são constítuidos por dois abertos disjuntos, não vazios, tais que a união desses é o espaço todo. Neste capítulo, iremos ver que um intervalo é um conjunto conexo, e exemplos de conjuntos conexos e não conexos. Também veremos, no final do capítulo, os espaços conexos por arcos. Estes espaços admitem um função contínua, denominada por *caminho*, que liga quaisquer dois pontos do espaço em questão.

4.1 Espaços conexos

Definição 4.1. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é conexo se não existirem abertos U e V, não vazios, tais que*

$$X = U \cup V \text{ e } U \cap V = \emptyset \text{(são disjuntos).}$$

Para ser mais fácil de se perceber esta definição, seguem-se alguns exemplos.

Exemplo 4.2. *Vamos considerar o $Y = [-1, 0[\cup]0, 1]$, com a topologia induzida pela topologia de $\mathbb{R}$. Para mostrar que Y não é um espaço conexo, determinemos dois abertos em Y nas condições da definição 4.1.*
Seja $K =]-2, 0[$. K é aberto da topologia em $\mathbb{R}$. Ora, o aberto U, não vazio, da topologia induzida em Y pode ser obtido através da interseção de K com Y:

$$U = Y \cap K \Leftrightarrow U = Y \cap]-2, 0[= [-1, 0[$$

Outro aberto não vazio, V, da topologia pode ser definido da seguinte forma:

$$V = Y \cap]0, 1.5[=]0, 1].$$

Como podemos observar a interseção dos abertos U e V ($U, V \neq \emptyset$) é o vazio e a união desses é o conjunto Y. Logo Y não é um espaço conexo.

Exemplo 4.3. *Mostremos que o conjunto $\mathbb{Q}$ não é conexo com a topologia induzida pela topologia de $\mathbb{R}$.*
Consideremos $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e tomemos $U =]-\infty, a[\cap \mathbb{Q}$ e $V =]a, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, abertos não vazios para a topologia induzida, temos que

$$\begin{cases} U \cap V = \emptyset \\ \mathbb{Q} = U \cup V \end{cases}$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela de $\mathbb{R}$ não é conexo

Exemplo 4.4. *Consideremos o espaço $X = \{a, b\}$ com a topologia discreta $\mathcal{P}(X)$.*
Ora, se tomarmos $U = \{a\}$ e $V = \{b\}$ de $\mathcal{P}(X)$ não vazios, vamos ter que

$$\begin{cases} U \cap V = \emptyset \\ X = U \cup V \end{cases}$$

Sendo assim, X não é conexo.

Exemplo 4.5. *Vejamos que tendo $X = \{a, b\}$, mas agora com a topologia trivial,$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ao considerarmos os abertos $U = \emptyset$ e $V = X$, podemos concluir que X não se pode escrever como a união de dois abertos disjuntos e não vazios. Ora, mas isso mostra que X é conexo.*

Estes dois exemplos, 4.4 e 4.5, mostraram que a conexidade depende da topologia que se está a considerar para o espaço em questão.

Exemplo 4.6. *Com o mesmo intuito que o exemplo 4.2, mas agora analisando o caso de*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \wedge y = \frac{1}{x}\}.$$

Como $X \subset \mathbb{R}^2$, vamos considerar X com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$.
Para mostrar este exemplo, podemos ilustrar o conjunto X como mostra a figura 4.1

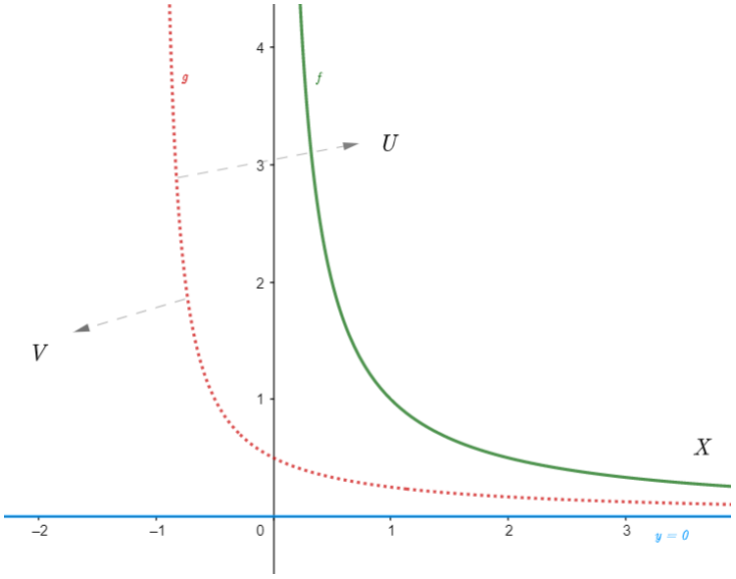


Figura 4.1: Figura do conjunto X, com a separação e os abertos U e V

Pela forma como é formado o conjunto X, quase nos parece que esse espaço, com a topologia induzida, é conexo, mas temos de ter mais cuidado. Ora, comecemos por observar que para a topologia usual X é fechado, isto é, $X = \partial X$, mas com a topologia induzida já é possível ter abertos em X como podemos observar pela imagem. Também pela imagem, observamos uma separação através da função $g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x+1} \times 0.5$.
Ou seja, podemos ter um aberto U da topologia induzida em $\mathbb{R}^2$, que esteja acima do gráfico de f e um V, também aberto da topologia induzida em $\mathbb{R}^2$, abaixo do gráfico.
Assim, concluímos que o espaço não é conexo porque temos que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Como podemos reparar, a definição de espaço conexo só depende da topologia em causa, isto é, só depende dos conjuntos a que chamamos de abertos.
A próxima proposição é referente a termos duas topologias, em que uma é mais fina do que a outra, e mostrar se o espaço formado pela topologia mais fina for conexa, então o outro espaço também o será.

Proposição 4.7. *Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias em X com $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Mostremos que se $(X, \mathcal{T}')$ é conexo, então $(X, \mathcal{T})$ também é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que $(X, \mathcal{T})$ não é conexo, ou seja, existem abertos $U, V \in \mathcal{T}$, disjuntos e não vazios, tais que $X = U \cup V$.
Como $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, então U, $V \in \mathcal{T}'$, significando que existe uma sepação em $\mathcal{T}'$, por outras palavras,

$$\exists U,\, V \in \mathcal{T}' : X = U \cup V,\, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset,\, V \neq \emptyset.$$

Ou seja, $(X, \mathcal{T}')$ não é conexo.
Portanto, acabámos de provar, por contra-recíproca, que $(X, \mathcal{T}')$ conexo $\implies$ $(X, \mathcal{T})$ conexo. □

Esta proposição 4.7 será novamente referida depois do corolário 4.19, onde vai ser demonstrada usando a função identidade e a proposição 4.18.

Agora que já foi feita uma pequena introdução e apresentação do que são espaços conexos, vamos passar para os teoremas e propriedades mais interessantes dos espaços em causa.

Teorema 4.8. *Seja X um espaço topológico.*
As seguintes afirmações são equivalentes:

1) X é conexo: não existem abertos U e V, não vazios, tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.

2) Se $A \subset X$ é aberto e fechado, então $A = \emptyset \vee A = X$.

Seguem-se três exemplos de aplicação da definição de espaços conexos:

Exemplo 4.9. *Consideremos um conjunto infinito X e a topologia co-finita $\mathcal{T}_f$ em X definida por*

$$\mathcal{T}_f = \{U \subset X : X \backslash U \text{ é finito ou } X \backslash U = X\}.$$

O espaço $(X, \mathcal{T}_f)$ é conexo.
Vamos mostrar esta afirmação. Suponhamos que X não é conexo. Escolhendo abertos, não vazios, $U, V \in \mathcal{T}_f$ tais que $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$, temos que:

$$\begin{cases} X \backslash U \text{ é finito} \vee X \backslash U = X \\ X \backslash V \text{ é finito} \vee X \backslash V = X \end{cases}$$

Por outro lado, como U e V são não vazios, o complementar em X de qualquer um destes abertos não é o próprio X, ficando apenas com a possibilidade do complementar ser finito.
Como supusemos que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$, concluimos que:

$$X \backslash U = V \wedge X \backslash V = U \tag{4.1.1}$$

Ora, pela igualdade (4.1.1), deduzimos que U e V são abertos finitos, o que é absurdo, porque $X = U \cup V$ tem que ser um conjunto infinito.

Como nota: Caso o conjunto X não fosse infinito não chegariamos a essa contradição.

Proposição 4.10. *Seja $A \subset X$.*
Se C é um subespaço conexo de X tal que $A \cap C \neq \emptyset$ e $(X \backslash A) \cap C \neq \emptyset$, então $\partial A \cap C \neq \emptyset$

Demonstração. Vejamos a figura 4.2 que ilustra o enunciado.

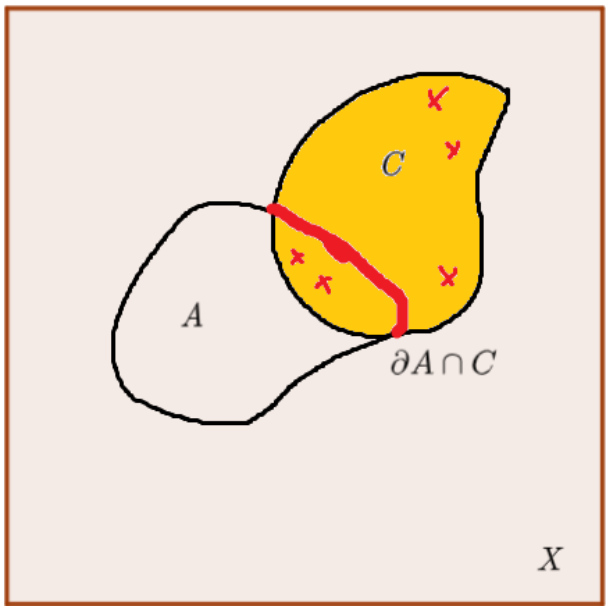


Figura 4.2: C vai ter pontos do conjunto A e de $X \backslash A$, passando pela fronteira de A.

Vamos supor, com vista a um absurdo, que $C \cap \partial A = \emptyset$. Consideremos também dois abertos não vazios da topologia induzida em C pela topologia de X, $U = C \cap intA$, que é aberto pois o interior de um conjunto é a união de abertos contidos nesse conjunto (exemplo 2.40) e não é vazio porque supusemos $C \cap \partial A = \emptyset$, e $V = C \cap extA$ também é aberto porque $extA = int(X \backslash A)$, ou seja, como o interior é aberto, consequentemente, o exterior também vai ser aberto, e também vai ser não vazio porque por hipótese $(X \backslash A) \cap C \neq \emptyset$, que formam $C = U \cup V$:

$$\begin{aligned}(C \cap intA) \cup (C \cap extA) &= C \cap (intA \cup extA) \\ &= C \cap (intA \cup extA) \cup (C \cap \partial A) \\ &= C \cap (intA \cup extA \cup \partial A) \\ &= C \cap X \text{ (proposição 2.34)} \\ &= C\end{aligned}$$

Vejamos agora, se $U \cap V = \emptyset$:

$$(C \cap intA) \cap (C \cap extA) \subset intA \cap extA = \emptyset$$

Portanto, U e V são uma separação de C, o que é absurdo visto que C é conexo. □

Continuando com as propriedades dos espaços conexos, vai-se seguir uma caracterização dos subespaços conexos de $\mathbb{R}$. Mas antes de avançarmos, fica como uma observação o que é um intervalo.
Chamamos intervalo a todo conjunto $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ que verifica a seguinte propriedade:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ tais que } a, b \in \mathcal{I},\ \forall c:\ a < c < b \implies c \in \mathcal{I}.$$

Agora que já sabemos o que é um intervalo, podemos seguir para o próximo teorema.

Teorema 4.11. *Seja $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{I}$ é um intervalo se e só se $\mathcal{I}$ for conexo.*

Com este teorema 4.11, ao analisarmos o conjunto Y do exemplo 4.2, vemos que Y não é conexo pelo facto de não ser um intervalo. Ou seja, caso tenhamos um conjunto semelhante ou com as mesmas características do conjunto Y, podemos simplesmente determinar se é ou não um intervalo e, por consequente, se é conexo ou não. Portanto, este teorema 4.11 facilita a identificação dos conjuntos conexos, caso os conjuntos em questão estejam contidos em $\mathbb{R}$.

Segue-se uma propriedade que mostra o que acontece, no caso de um dado espaço X não for conexo e um subconjunto $Y \subset X$ for conexo.

Proposição 4.12. *Seja X um espaço não conexo, tal que $X = U \cup V$ com U e V abertos, disjuntos e não vazio.*
Se $Y \subset X$ é um subespaço conexo, então $Y \subset U$ ou $Y \subset V$.

Vejamos agora, um corolário bastante importante. Vamos ver que caso um espaço seja a união de espaços conexos com um ponto em comum, então temos um espaço também conexo.

O que torna este corolário tão importante são as suas aplicações, onde veremos mais à frente nos exemplos 4.14 e 4.15.

Corolário 4.13. *A união de conexos com um ponto em comum é conexo.*

Demonstração. Seja $(A_\alpha)_\alpha$ uma família de conjuntos conexos que têm um ponto em comum, isto é,

$$\exists x \in A_\alpha, \forall_\alpha \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_\alpha A_\alpha.$$

E com estas considerações, queremos mostrar que $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ é conexo.
Então, suponhamos, com vista a um absurdo, que existem abertos U e V não vazios e disjuntos, tais que $A = U \cup V$.
Seja $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ o ponto comum a todos os espaços A_α. Suponhamos que $x \in U$, embora pudessemos considerar que $x \in V$.
Para cada α fixo, temos que $x \in A_\alpha$, e como esse A_α é conexo temos

$$x \in A_\alpha \subset \bigcup_\alpha A_\alpha = A = U \cup V$$

E estamos nas condições da proposição 4.12, assim:

$$A_\alpha \subset U \vee A_\alpha \subset V,$$

mas como tomamos um $x \in U$, $A_\alpha \subset U$.
Então, para todo o α,

$$A_\alpha \subset U \implies \bigcup_\alpha A_\alpha \subset U \implies A \subset U.$$

Ora, com esta afirmação, chegamos a um absurdo, pois concluimos que $V = \emptyset$.
Logo, não pode existir nenhuma separação de A, portanto, A é conexo. □

Vejamos este exemplo sobre o corolário 4.13.

Exemplo 4.14. *Consideremos os gráficos de todas as funções lineares em* $\mathbb{R}$*:*

- $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *linear* $\implies L(0) = 0$*;*
- $Graf_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = L(x),\ L \quad linear\}$.

Ora todo $Graf_L$ *é conexo (porque não existe nenhuma separação) e interseta a origem, e assim, como estamos nas condições do corolário 4.13 se fizermos a união de todos os gráficos, isto é,* $\bigcup_L Graf_L$*, acabamos por ter o espaço* $\mathbb{R}^2$*, exceto o eixo* $O_y \backslash \{(0, 0)\}$.
Portanto, essa união é conexa, pois os gráficos de todas as funções intersetam a origem como é visível na figura 4.3.

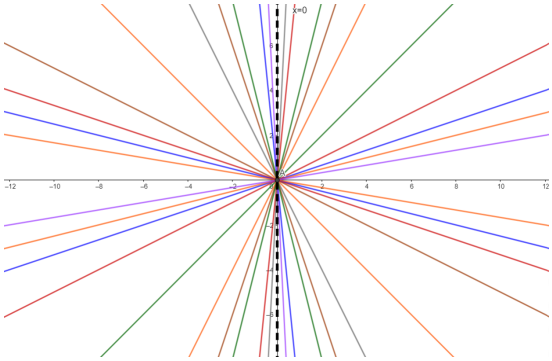


Figura 4.3: Gráfico de algumas funções lineares L em $\mathbb{R}$.

Outro exemplo, também relativo ao corolário 4.13 é o seguinte:

Exemplo 4.15. *Consideremos um conjunto finito de segmentos de retas $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ que não se intersetam todos no mesmo ponto, mas apenas existe um ponto em comum entre dois a dois segmentos de reta. Para ser mais fácil de interpretar, observemos a figura 4.4.*

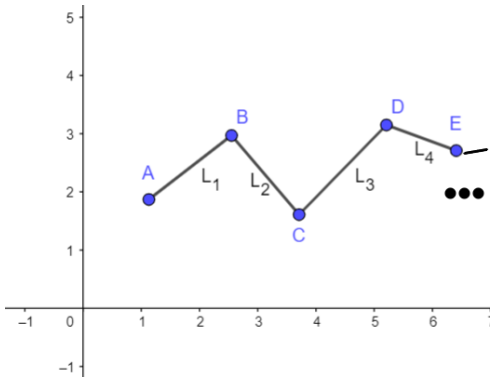


Figura 4.4: Exemplo de segmentos de reta com apenas um ponto em comum entre cada dois consecutivos.

Neste exemplo, não podemos usar o corolário 4.13 da mesma forma que foi feito no exemplo 4.14, porque apenas existe um ponto em comum entre dois em dois segmentos de reta. Portanto, vamos usar o corolário 4.13 de forma recursiva, ou seja, começamos pelos segmentos de reta L_1 e L_2 e vemos que a união é conexa, depois juntamos a essa união o segmento L_3 e como tem um ponto em comum com um conjunto conexo, essa união final é conexa, e assim por adiante. Provando assim, com o uso do corolário 4.13, que a união de um número finito de segmentos de reta é um espaço conexo.

A próxima proposição generaliza o exemplo 4.15, onde vamos considerar um conjunto finito de espaços conexos, e pelo facto de haver pontos em comum entre dois conexos consecutivo, A_n e A_{n+1}, vai ser possível afirmar que a união desses espaço conexos é também conexo.

Proposição 4.16. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset X$ espaços conexos tais que, para todo $n \in \{1, \ldots, k-1\}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.*
Então, $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ é conexo.

Vejamos agora um outro corolário da proposição 4.12 diz que qualquer conjunto que esteja entre um espaço conexo e a sua aderência também vai ser conexo.

Corolário 4.17. *Seja X um espaço topológico, $A \subset X$ é conexo e $A \subset B \subset \overline{A}$. Então B também é conexo.*

Vamos agora relacionar funções contínuas com espaços conexos.

Proposição 4.18. *Sejam $f : X \to Y$ uma função contínua e X um espaço topológico conexo. Então $f(X)$ é conexo.*

Uma consequência que podemos fazer sobre esta proposição:

Corolário 4.19. *Se $f : X \to Y$ for um homeomorfismo, isto é, f é bijetiva, f contínua e f^{-1} contínua, então*

$$X \text{ é conexo } \Leftrightarrow Y \text{ é conexo.}$$

Onde, $f(X) = Y$ e $f^{-1}(Y) = X$ e para demonstrar a equivalência usa-se a proposição 4.18.

Vamos apresentar uma demonstração alternativa à proposição 4.7, onde vamos utilizar a proposição 4.18.

Demonstração da proposição 4.7.

Vamos considerar a seguinte função $i : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ definida por $i(x) = x$.
Podemos começar por afirmar, pela proposição 2.49, que i é uma função contínua devido à definição de continuidade e porque $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
Por hipótese, sabemos que $(X, \mathcal{T}')$ é conexo podendo assim usar a proposição 4.18, concluindo que $i(X) = X$ é conexo que, por conseguinte, faz com que $(X, \mathcal{T})$ seja conexo. □

O teorema que se segue é bastante conhecido e vamos interpretá-lo no âmbitos dos conjuntos conexos, onde iremos relacionar teoremas anteriores, deste capítulo, para mostrar que a afirmação indicada é verdadeira.

Teorema 4.20 (Teorema do valor intermédio ou Teorma de Bolzano)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*
Para qualquer λ entre $f(a)$ e $f(b)$ existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \lambda$.

Demonstração. Para ajudar a entender e a mostrar este teorema, observemos a figura 4.5. Seja

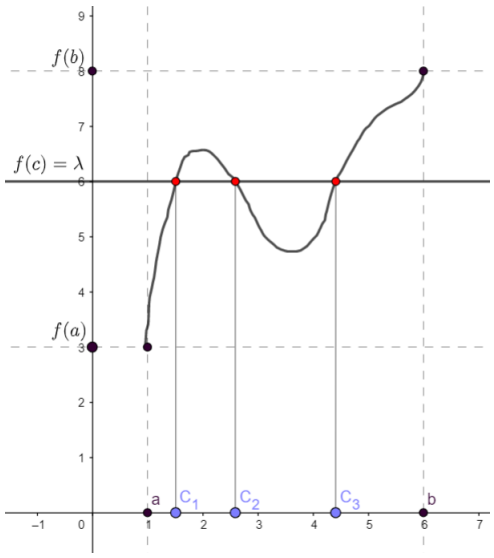


Figura 4.5: Ilustração do teorma de Bolzano.

.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
Suponhamos que $f(a) < f(b)$ (análogo para $f(b) < f(a)$).
$\mathcal{I} = [a, b]$ é um conjunto conexo, pela proposição 4.11, e dado que f é uma função contínua, a

proposição 4.18 vai garantir que $f(\mathcal{I})$ é conexo. Como $f(\mathcal{I}) \subset \mathbb{R}$, então $f(\mathcal{I})$ é um intervalo e pela proposição 4.11 temos

$$\begin{aligned} f(a), f(b) \in f(\mathcal{I}) &\implies [f(a), f(b)] \subset f(\mathcal{I}) \\ &\implies \forall_{\lambda \in]f(a), f(b)[} \, \exists_{c \in]a,b[} : f(c) = \lambda. \end{aligned}$$

□

Com o teorema de Bolzano demonstrado, ainda o podemos reformular de forma a que fique mais generalizado, ou seja, vamos agora tomar um espaço X conexo em vez de um intervalo de $\mathbb{R}$.

Teorema 4.21 (Teorema do valor intermédio ou Teorema de Bolzano (geral))**.** *Sejam X um espaço topológico conexo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

$$\forall a, b \in X, \forall \lambda \text{ entre } f(a) \text{ e } f(b), \exists\, c \in X : \; f(c) = \lambda.$$

Já vimos com algum detalhe, como é que os espaços conexos funcionam quando existem uniões, quando um conjunto não é conexo mas contém um subespaço conexo e até mostrámos um importante teorema, teorema de Bolzano.
Contudo, ainda não estudámos quais as características e comportamentos do produto cartesiano de espaços conexos. Ora vejamos o teorema que se segue, juntamente com a sua demonstração.

Teorema 4.22. *O produto cartesiano de um número finito de espaços conexos é conexo.*

Demonstração. Para este teorema, é possível usar o processo de indução matemática, pois temos um número finito de espaços. Ou seja, primeiro mostramos que o produto cartesiano de $X_1 \times X_2$ é conexo, e depois assume-se por hipótese de indução, que neste caso: se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são conexos então $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ é conexo. E desta hipótese, temos de provar para $n+1$ espaços conexos, o produto cartesiano também vai ser conexo.
Para simplificar a demonstração por indução, vamos tomar apenas dois conjuntos conexos.
Como nota, relembremos através da definição 1.9, como é definido o produto cartesiano:

$$X \times Y = \{(x, y) : \; x \in X \wedge y \in Y\},$$

Vamos começar por fixar um ponto $b \in Y$ e variar os elementos de X, isto é,

$$X \times \{b\} = \{(x, b) : x \in X\}.$$

E desta forma, podemos criar o seguinte homeomorfismo $\varphi : X \times \{b\} \to X$, definido por $(x, b) \mapsto x$.
Portanto, $X \times \{b\}$ é homeomorfo a X (conclusão verdadeira pela definição **??**).
Dado que temos um homeomorfismo e sabemos que X é conexo, pela proposição 4.18 podemos concluir que $X \times \{b\}$ é conexo. Da mesma forma, $\{a\} \times Y$ é conexo pois é homeomorfo a Y.
Pelo facto de termos $X \times \{b\}$ e $\{a\} \times Y$, estes conjuntos têm o ponto (a, b) em comum, e então pelo corolário 4.13

$$X \times \{b\} \cup \{a\} \times Y \text{ é conexo.}$$

Definindo agora um conjunto T_x, onde apenas o ponto $x \in X$ vai variar, isto é,

$$T_x = X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$$

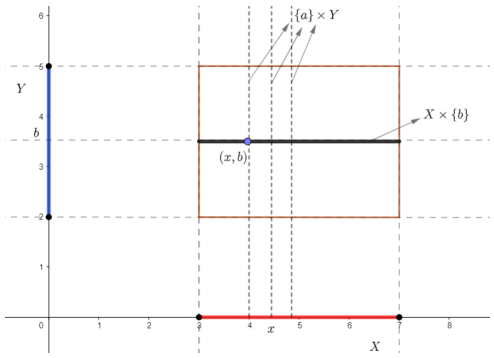


Figura 4.6: Existência de um ponto em comum a $\mathcal{T}_X$ para qualquer $x \in X$.

.

este conjunto acaba também por ser conexo, pelo corolário 4.13, porque vai existir sempre um ponto em comum mesmo quando $x \in X$ varia.

Portanto, se fizermos a união desses conjuntos, não só temos o espaço $X \times Y$ como sabemos que esse espaço é conexo pois todos os conjuntos têm em comum os pontos de $X \times \{b\}$. Ou seja,

$$X \times Y = \bigcup_x T_x \text{ é conexo.}$$

□

A seguinte proposição afirma que se o produto cartesiano de um número finito ou infinito de espaços for conexo, então esses espaços também serão conexos.

Proposição 4.23. *Sendo (X_α), com $\alpha \in A$, uma família de espaços topológicos não vazios tais que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é conexo, então X_α é conexo, para qualquer $\alpha \in A$.*

Demonstração. Para mostrar esta implicação, vamos utilizar a definição de espaço conexo e o método de redução ao absurdo. Iremos determinar conjuntos de abertos de forma a termos um absurdo e concluirmos assim a implicação em causa.

Suponhamos que existe $\alpha_0 \in A$, tal que X_{α_0} não é conexo, ou seja, existem abertos, não vazio, U e V tais que $X_{\alpha_0} = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.
Ora, consideremos um $\beta \in A$ qualquer e criemos os abertos U_β e V_β da seguinte forma:

$$U_\beta = \begin{cases} X_\beta, \ se \ \beta \neq \alpha_0 \\ U, \ se \ \beta = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad V_\beta = \begin{cases} X_\beta, \ se \ \beta \neq \alpha_0 \\ V, \ se \ \beta = \alpha_0 \end{cases}$$

Desta forma, podemos construir abertos do espaço produto, o produto dos U_β e dos V_β:

- $\prod_\beta U_\beta \cap \prod_\beta V_\beta = \emptyset$ porque

$$x = (x_\beta)_{\beta \in A} \in \prod_\beta U_\beta \cap \prod_\beta V_\beta \implies \forall_\beta x_\beta \in U_\beta \cap V_\beta,$$

quando $\beta = \alpha_0$ temos que $x_{\alpha_0} \in U_\beta \cap V_\beta$ que é impossível

- $\prod_{\beta} U_\beta \cup \prod_{\beta} V_\beta = \prod_{\alpha} X_\alpha$. Ora, como sabemos que $\prod_{\alpha} X_\alpha$ é conexo, e as condições de abertos disjuntos e da união do espaço já foram verificadas, resta-nos apenas o facto de um destes abertos serem vazios, ou seja,

$$\prod_{\beta} U_\beta = \emptyset \vee \prod_{\beta} V_\beta = \emptyset.$$

  O que é absurdo.

Concluímos assim, que sendo $\prod_{\alpha} X_\alpha$ conexo, então $\forall \alpha \; X_\alpha$ é conexo.

□

Como observação: Se esta proposição fosse para um número finito de espaços conexos, poderiamos considerar uma função projeção em X_{α_0}, $\pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha} X_\alpha \to X_{\alpha_0}$, e pelo teorema 2.55.7) e .8) sabemos que π_{α_0} é contínua. Portanto ao usarmos a propriedade 4.18, poderiamos concluir que X_α é um espaço conexo.

Definição 4.24. *Seja X um espaço topológico.*
Se os únicos subconjuntos conexos de X são os conjuntos unitários, dizemos que X é um espaço totalmente desconexo.

Proposição 4.25. *Seja X um espaço topológico finito e de Hausdroff.*
Então X é totalmente desconexo.

Demonstração. Vamos mostrar a afirmação em causa, e para isso vamos primeiramente provar que a topologia de X é a topologia discreta, ou seja, os conjuntos de $\mathcal{P}(X)$ podem ser obtidos através de uniões de conjuntos unitários do espaço X.
Depois, temos de concluir que qualquer espaço topológico é totalmente desconexo para a topologia discreta.

Sendo assim, comecemos pela primeira parte. Seja $x \in X$, e consideremos $y \in X \backslash \{x\}$.
Visto que X é um espaço de Hausdroff, temos $U, V \in X$ disjuntos tais que

$$x \in U \wedge y \in V.$$

Em particular, tomemos agora um aberto U_y, onde

$$x \in U_y \wedge y \notin U_y.$$

Pelo facto de U_y existir para qualquer $y \in X$, então temos que

$$\{x\} = \bigcap_{\substack{y \neq x \\ y \in X}} U_y.$$

Como sabemos que X é finito, podemos concluir que $\{x\}$ é aberto pelo facto de ser a interseção finita de abertos.
Portanto, como $\{x\}$ é aberto para qualquer $x \in X$, temos assim a topologia $\mathcal{P}(X)$ que se obtém

através de todas as interseções finitas e uniões dos conjuntos unitários.

Prosseguimos assim para a segunda parte da demonstração.
Consideremos um conjunto $Y \subset X$ tal que

$$Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Para a topologia discreta, podemos reescrever Y como

$$Y = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\},$$

onde todos os $\{x_i\}$, com $i = \{1, \ldots, n\}$ são abertos disjuntos e não vazios, ou seja, Y não é conexo caso seja formado por dois ou mais elementos de X.
Logo, os únicos conjuntos conexos de X são os unitários e por isso X é totalmente desconexo.
□

4.2 Espaços conexos por arcos

Vejamos agora uma nova definição, que está relacionada com os espaços conexos.

Definição 4.26 (Conexo por arcos)**.** *Seja X um espaço topológico.*
Dizemos que X é conexo por arcos se $\forall x, y \in X$ existir um caminho em X que liga x e y, isto é, existir uma função contínua $\gamma : [a, b] \to X$, tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

Exemplo 4.27. *Sendo $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, X é conexo por arcos.*

Para mostrarmos que é conexo por arcos, temos que definir um caminho $\gamma : [0, 1] \to X$, que liga quaisquer $x, y \in X$. Ou seja, temos de arranjar funções contínuas que fazem a ligação entre as combinações dos pontos a,b,c. Ora vejamos:

$(x = y = a)$ *Seja a função $\gamma : [0, 1] \to X$ a função constante, $\gamma(t) = a$, onde $\gamma(0) = \gamma(1) = a$. Verifiquemos se γ é uma função contínua, ou seja,*

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \textit{aberto em } X \implies \gamma^{-1}(A) \textit{ é aberto em } [0, 1].$$

Vejamos agora como são as imagens inversas:

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \gamma^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, \textit{ se } a \notin A \\ [0, 1], \textit{ se } a \in A \end{cases} .$$

Portanto, tomando $A = \{a\} \vee A = \{a, b\} \vee A = X$ vamos obter $\gamma^{-1}(A) = [0, 1]$, e no caso de $A = \emptyset$, então $\gamma^{-1}(A) = \emptyset$.
Analogamente, podemos repetir o procedimento para $(x = y = b)$ e $(x = y = c)$.

$(x = a,\ y = b)$ *Definamos a função $\gamma : [0, 1] \to X$ por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} a, \textit{ se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ b, \textit{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad e\ \gamma(0) = a, \gamma(1) = b$$

Provemos agora que esta função é contínua, isto é,

- $\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $\gamma^{-1}(\{a\}) = [0, \frac{1}{2}[$
- $\gamma^{-1}(\{a, b\}) = [0, 1]$
- $\gamma^{-1}(X) = [0, 1]$

Como todos os intervalos são abertos para a topologia induzida de $[0, 1]$ *pela topologia de* $\mathbb{R}$ *então verificámos a continuidade da função.*

$(x = a,\ y = c)$ *Vamos agora definir* $\gamma : [0, 1] \to X$ *como*

$$\gamma(t) = \begin{cases} a,\ se\ 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c,\ se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad e\ \gamma(0) = a, \gamma(1) = c$$

Verifiquemos a continuidade da função escolhida:

- $\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $\gamma^{-1}(\{a, b\}) = \gamma^{-1}(\{a\}) = [0, \frac{1}{2}[$
- $\gamma^{-1}(X) = [0, 1]$

Mais uma vez confirmámos a continuidade da função γ.

$(x = b,\ y = c)$ *Seja a função* $\gamma : [0, 1] \to X$, *definida por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} b,\ se\ 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c,\ se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad e\ \gamma(0) = b, \gamma(1) = c$$

Provemos que esta função é de facto contínua:

- $\gamma^{-1}(\emptyset) = \gamma^{-1}(\{a\}) = \emptyset$
- $\gamma^{-1}(\{a, b\}) = [0, \frac{1}{2}[$
- $\gamma^{-1}(X) = [0, 1]$

Como existe um caminho que liga qualquer $x, y \in X$, *portanto, acabámos de mostrar que* X *é conexo por arcos.*

Exemplo 4.28. *No ínicio deste capítulo, vimos exemplos de espaços conexos e não conexos, e também que muitas vezes a topologia escolhida para o espaço tinha efeito sobre a conexidade. Utilizemos esses mesmos exemplos para determinar se os espaços são ou não conexos por arcos.*

- *Exemplo 4.2:*
  Podemos dizer, através da definição, que o conjunto Y, *do exemplo 4.2 não é conexo por arcos, pois não podemos ligar quaisquer pontos de* $[-1, 0[$ *a* $]0, 1]$. *Mas, conseguimos determinar um caminho que liga quaisquer dois pontos no intervalo* $[-1, 0[$ *e um outro que liga outros dois pontos quaiquer no intervalo* $]0, 1]$.

- *Exemplo 4.3:*
  O conjunto $\mathbb{Q}$ *não é conexo por arcos, porque não conseguimos arranjar nenhuma função continua,*$\gamma : [a, b] \to \mathbb{Q}$, *que ligue quaisquer dois pontos de* $\mathbb{Q}$.

- *Exemplo 4.6:*
  Da forma está contruído com conjunto X, percebemos que não conseguimos ligar $j \in \{y = 0\}$ e $k \in \{y = \frac{1}{x}\}$. Por outro lado, conseguimos ligar quaisquer dois pontos do conjunto $\{y = 0\}$ e o mesmo acontece para o conjunto $\{y = \frac{1}{x}\}$.

Proposição 4.29. *Se X é conexo por arcos, então X é conexo.*

Pela proposição que acabámos de ver, apenas funciona num sentido, isto é, se o conjunto em questão for conexo por arcos então há-de ser conexo. Mostremos com um contra-exemplo, o porquê da recíproca não ser verdadeira.

Exemplo 4.30. *Tomemos a seguinte função $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.*
Como nota prévia, esta função não tem limite quando $x \to 0$.
Será esta função contínua? Sim, porque é uma função trigonométrica.
Será o intervalo $]0, 1]$ conexo? Sim, devido à proposição 4.11.

Com estas duas afirmações podemos usar a proposição 4.18 para dizer que $f(]0, 1]) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Seja Y o gráfico da função f, isto é,

$$Y = \left\{ \left(x, sen\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right) : x \in]0, 1] \right\} = Graf_f \tag{4.2.1}$$

Este conjunto $Graf_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2,\ x \in]0, 1]\}$ também é conexo pela a proposição 4.29, porque se observarmos a figura 4.7, podemos ligar quaisquer dois pontos, no gráfico de f, tornando assim $Graf_f$ conexo por arcos que consequentemente, é conexo.

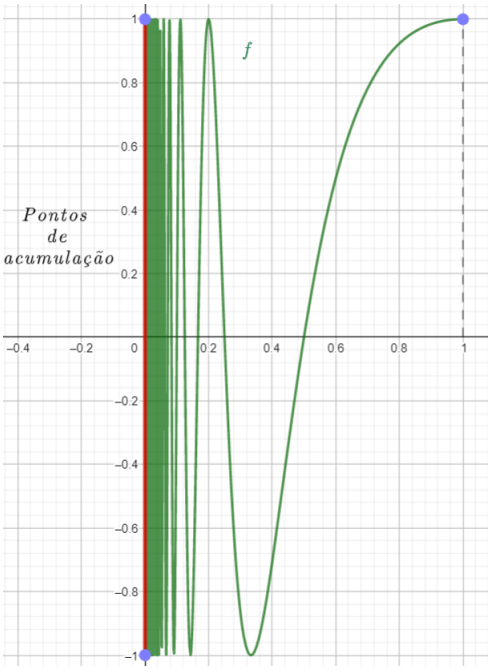


Figura 4.7: Gráfico da função f com os pontos de acumulação.

Analisando a figura com mais detalhe, conseguimos constatar o seguinte: Se juntarmos ao gráfico os seus pontos de acumulação, neste caso $\{0\} \times [-1, 1]$, percebemos que este novo conjunto,

$$\overline{Y} = Y \cup \{0\} \times [-1, 1],$$

é de facto conexo, porque estamos no caso do corolário 4.17. Ou seja, pelo facto de Y ser conexo ao unirmos os pontos de acumulação de Y, o conjunto $\overline{Y}$ acaba por ser essa reunião, estando assim nas condições do corolário 4.17.
Por outro lado, não conseguimos ligar através de um caminho os pontos de $\{0\} \times [-1,1]$ com os do $Graf_f$. Logo $\overline{Y}$ não é conexo por arcos.
E assim, mostrámos um caso de um conjunto conexo mas não conexo por arcos.

Definição 4.31. *Sejam X um espaço topológico e $x, y \in X$.*
Definimos as seguintes relações binárias:

- *$x\rho y$ se e só se existe um conexo que contém x e y*
- *$x\rho' y$ se e só se existe um caminho que liga x a y, isto é, existe uma função contína*

$$\gamma : [0,1] \to X \quad : \quad \gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y$$

Proposição 4.32. *A relação binária ρ é uma relação de equivalência.*
As classes de equivalência de ρ chamam-se as componentes conexas de X.

Demonstração. Para justificar estas afirmações, vamos usar a definição 1.12. Demonstremos que a relação binária ρ satisfaz as propriedades de reflexão, simetria e de transitividade .

($Reflexividade$) : "$\forall x \in X$ $x\rho x \Leftrightarrow$ existe um conexo de X que contém x".
Esta propriedade verifica-se, porque se considerarmos um conexo com apenas um elemento, isto é, $x \in \{x\}$, a propriedade verifica-se.

($Simetria$) : "$\forall x, y, \in X$ se $x\rho y \implies y\rho x$".
Usemos a definição de $x\rho y$ para mostrar a simetria.

$$\begin{aligned} x\rho y &\implies \text{existe um conexo de } X \text{ que contém } x \text{ e } y \\ &\implies \text{existe um conexo de } X \text{ que contém } y \text{ e } x \\ &\implies y\rho x \end{aligned}$$

($Transitividade$) : "$\forall x, y, z, \in X$, $x\rho y \wedge y\rho z \implies x\rho z$"
Usemos novamente a definição para demonstrar a afirmação.

$$\begin{aligned} x\rho y \wedge y\rho z &\implies \text{existe um conexo } C_1 \text{ que contém } x \text{ e } y \text{ e existe um conexo } C_2 \text{ que contém } y \text{ e } z \\ &\implies C_1 \cup C_2 \text{ é conexo porque } y \in C_1 \cap C_2 \quad \text{(corolário 4.13)} \\ &\implies x,\, z \in C_1 \cup C_2 \\ &\implies x\rho z \end{aligned}$$

□

Proposição 4.33. *A relação binária ρ' é uma relação de equivalência.*
As classes de equivalência de ρ' chamam-se as componentes conexas por arcos de X.

Demonstração. Vamos provar que a relação ρ' é uma relação de equivalência.

$(Reflexividade):$ "$\forall x \in X\ x\rho' x \Leftrightarrow$existe um caminho que liga x a x".
Considerando o caminho $\gamma : [0,1] \to X$ definido por $t \mapsto x$ e temos que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = x$ e que γ é contínua, porque é a função constante.
Portanto, a propriedade é verificada.

$(Simetria):$ "$\forall x, y, \in X$ se $x\rho' y \implies y\rho' x$"
Suponhamos que $\gamma_1 : [0,1] \to X$ que liga x a y. Considerando o caminho inverso $\gamma_2 : [0,1] \to X$ definido por $\gamma_2(t) = \gamma_1(1-t)$ acabamos por ligar y a x.

$(Transitividade):$ "$\forall x, y, z, \in X,\ x\rho' y \wedge y\rho' z \implies x\rho' z$"
Tomemos os seguintes caminhos:

$$\begin{cases} \gamma_1 : [0,1] \to X, \text{ e liga } x \text{ a } y \\ \gamma_2 : [0,1] \to X, \text{ e liga } y \text{ a } z \end{cases}.$$

Ou seja, $\gamma_1(0) = x$ e $\gamma_1(1) = y$, e o outro caminho, $\gamma_2(0) = y$ e $\gamma_2(1) = z$. Através destes caminhos, podemos criar um novo $\gamma_3 : [0,2] \to X$ definido como:

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t),\ 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t-1),\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases},$$

onde $\gamma_3(0) = x$ e $\gamma_3(2) = z$

□

Segue-se duas proposições que mostram algumas consequências sobre as proposições 4.32 e 4.33, ou seja, o facto destas relações binárias ρ e ρ' serem relações de equivalência.

Proposição 4.34.

1. *X é a união das suas componentes conexas, que são disjuntas duas a duas e não vazias.*
2. *Todo o conexo de X interseta uma e uma só destas componentes conexas.*
3. *As componentes conexas são conexas.*

Demonstração.

1. Para justificar esta afirmação, basta-nos relembrar da proposição 1.16, que refere-se às classes de equivalência serem disjuntas duas a duas, são todas não vazias e a sua união vai dar X.

2. Consideremos $A \subset X$ conexo, e suponhamos que $A \cap C_1 \neq \emptyset$ e $A \cap C_2 \neq \emptyset$, com C_1, C_2 duas componentes conexas de X. Deste modo, temos que

$$\exists\, x, y \in X : x \in A \cap C_1 \wedge y \in A \cap C_2$$

Como A é conexo e $x, y \in A$, então podemos dizer que $x\rho y$. Ou seja, $x \in C_2$ e $y \in C_1$. Logo, $C_1 = C_2$

3. Seja $C \subset X$ uma das componentes conexas de X.
   Consideremos um $x \in C$ arbitrário, para qualquer $y \in C$ vamos ter um conexo $A_y \subset X$, onde $x, y \in A_y$.
   Pela afirmação 2. sabemos que A_y apenas pode intersetar uma das componentes de X, portanto, $A_y \subset C \ \forall y \in C$. Então, $C = \bigcup_{y \in C} A_y$ é conexo porque é a reunião de conexos com um ponto em comum, neste caso o x.
   Concluímos assim que C é um conexo.

□

Proposição 4.35.

1. *X é a união das suas componentes conexas por arcos, que são disjuntas duas a duas e não vazias.*

2. *Todo o conexo por arcos de X interseta uma e uma só destas componentes conexas por arcos.*

3. *As componentes conexas por arcos são conexas por arcos.*

Demonstração.

1. Esta afirmação acaba por ser justificada da mesma foram que a proposição 4.34, porque ρ' é uma relação de equivalência como verificámos na proposição 4.32.

2. Seja $A \subset X$ conexo por arcos, e vamos supor que $A \cap C_1 \neq \emptyset$ e $A \cap C_2 \neq \emptyset$, com C_1, C_2 duas componentes conexas por arcos de X. Deste modo, temos que

   $$\exists\, x, y \in X : x \in A \cap C_1 \wedge y \in A \cap C_2.$$

   Ora, como A é conexo por arcos, então vai existir um caminho γ que liga x a y, logo $x \rho' y$. Portanto $x \in C_2$ e $y \in C_1$ e consequentemente $C_1 = C_2$.

3. Consideremos x e y arbitrários, pertencentes à classe de equivalência C, ou seja, xCy. Isso significa que existe um caminho γ que liga x e y, mas isso é a definição de conexo por arcos. Portanto, as componentes conexas por arcos são conexas por arcos.

□

Exemplo 4.36. *Para entender, estes conceitos de componentes conexas e componentes conexas por arcos, vejamos o exemplo 4.30.*
Nesse exemplo, temos que $\overline{Y}$ é um conjunto conexo e não é um conjunto conexo por arcos. No entanto, tem uma componente conexa, que é o próprio conjunto $\overline{Y}$ (porque $\overline{Y}$ é conexo) e duas componentes conexas por arcos, que são o $Graf_f$ (cor verde da figura 4.7) e $\{0\} \times [-1, 1]$ (cor vermelha da figura 4.7).

Capítulo 5

Espaços Compactos

Um espaço compacto, neste contexto, vai ser um pouco diferente daquele que se aborda em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Ou seja, dizemos que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se e só se for fechado e limitado. Mas neste contexto, vamos primeiramente definir uma cobertura de abertos e dessa vamos extrair uma subcobertura finita.

Como podemos ver, a definição acaba por ser um pouco diferente e até um pouco complexa, por ser mais abstrado do que estávamos habituados. Apesar de tudo, irémos mostrar mais à frente que um conjunto é compacto da mesma maneira que definimos em $\mathbb{R}$.
Para entendermos bem esta "nova"definição, vamos fazer alguns exemplos de aplicação e ver algumas propriedades e teoramas de um espaço compacto.

5.1 Espaços compactos

Definição 5.1 (Cobertura aberta)**.** *Seja X um espaço topológico.*
Uma cobertura aberta de X é uma coleção de conjuntos abertos $(A_\alpha)_\alpha$ tal que:

$$X = \bigcup_\alpha A_\alpha.$$

Se $Y \subset X$, uma cobertura aberta de Y é uma coleção de conjuntos abertos de X, $(B_\alpha)_\alpha$, tais que:

$$Y \subset \bigcup_\alpha B_\alpha$$

Para entender o que foi escrito, observemos a figura 5.1.

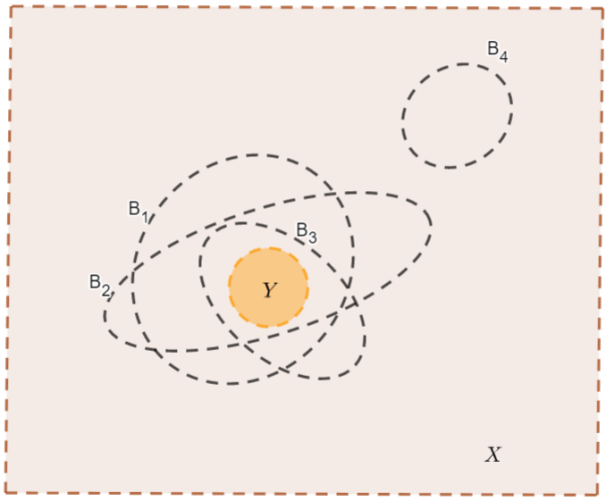


Figura 5.1: Espaço Y é coberto por abertos de X.

Podemos constatar que Y está contido na união dos conjuntos B_α e, como comentário, existe o conjunto B_4 que não tem importância para Y, ou seja, podemos retirá-lo e continuamos a ter uma reunião de abertos que contém o espaço Y.
Feita esta analogia, avancemos com a definição de espaço compacto.

Definição 5.2 (Espaço Compacto)**.** *Um espaço topológico X diz-se compacto, se de toda a cobertura aberta de X se pode extrair uma subcobertura finita.*

Sem mais demoras, passemos para os exemplos.

Exemplo 5.3.

1. *O espaço $\mathbb{R}$ não é compacto.*
   Seja $\mathcal{C}$ a cobertura em $\mathbb{R}$:
   $$\mathcal{C} = \{]n, n+2[: n \in \mathbb{Z}\}.$$
   Podemos afirmar que $\mathcal{C}$ é de facto uma cobertura de $\mathbb{R}$, pois a união destes abertos igualam o espaço $\mathbb{R}$. Mas desta cobertura $\mathcal{C}$, não conseguimos extrair nenhuma subcobertura finita de modo a que tenhamos o espaço todo, porque se tomarmos uma subcobertura finita tal que
   $$\mathcal{A} = \{]n_1, n_1+2[,]n_2, n_2+2[, \ldots]n_N, n_N+2[\}$$
   a união destes dos elementos de $\mathcal{A}$ apenas conteria parte do espaço $\mathbb{R}$

2. *Seja $X =]0, 1]$. Este espaço não é compacto.*
   Ora vejamos o porquê de X não ser compacto.
   Comecemos por definir uma cobertura deste intervalo, com abertos da topologia induzida em X:
   $$\mathcal{A} = \left\{ \left] \frac{1}{n}, 1 \right] : n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   Podemos referir que $\mathcal{A}$ é uma cobertura de X, porque a união dos seus intervalos cobrem o espaço X.
   Portanto, os elementos de uma subcobertura finita são:$\{]\frac{1}{n_1}, 1], \ ]\frac{1}{n_2}, 1], \ \ldots, \ ]\frac{1}{N}, 1]\}$,

e consequentemente, esta subcobertura, embora finita, não cobre o espaço X, pois se fizermos a união dos seus elementos percebemos que o maior deles não cobre o espaço X. Portanto X não é compacto.

Proposição 5.4. *Todos os espaços finitos são compactos.*

Demonstração. Consideremos o espaço finito X da seguinte forma:

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Ora, tomando uma cobertura (A_α) de X.
Suponhamos que para cada elemento $a_i \in X$, vai existir pelo menos um $A_{\alpha_i} \in (A_\alpha)$, tal que a união dos A_{α_i} contenha o espaço X, isto é,

$$\forall_{a_i \in X}, \exists_{A_{\alpha_i} \in A_\alpha} : a_i \in A_{\alpha_i} \quad (\text{com } i = \{1, \ldots, n\})$$
$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$$

Como temos um número finito de abertos de (A_α), então acabámos de mostrar uma subcobertura $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ finita de X. Portanto X é um espaço compacto. □

Exemplo 5.5. *Consideremos o espaço topológico $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.*
Este é um espaço compacto. Seja $\mathcal{A} = (A_\alpha)$ uma cobertura aberta de X. Então, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $0 \in A_0$ e como A_0 é aberto,

$$\exists_{\epsilon > 0} :]-\epsilon, \epsilon[\cap X \subset A_0$$

Uma vez que $\frac{1}{n} \to 0$, vai existir um $p \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq p, \ \frac{1}{n} \in A_0, \ \textit{porque } \tfrac{1}{n} \in X \ \textit{e } \tfrac{1}{n} \in]-\epsilon, \epsilon[.$$

Ou seja, a partir de uma certa ordem p, esses pontos que tendem para 0 vão estar também contidos em $A_0 \in \mathcal{A}$
Para $n < p$, os restantes elementos $\frac{1}{n}$ são em número finito, e consequentemente vão existir $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1 \in \mathcal{A}}$ tais que

$$1 \in A_1, \ \frac{1}{2} \in A_2, \ \ldots, \ \frac{1}{p-1} \in A_{p-1}.$$

Então,

$$X = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{p-1}.$$

Ora, extraímos uma subcorbertura finita, consequentemente, X é um espaço compacto.

Proposição 5.6. *Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias em X com $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Sendo $(X, \mathcal{T}')$ compacto, então $(X, \mathcal{T})$ também é compacto.*

Demonstração. Consideremos $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ uma cobertura aberta de X.
Como sabemos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}'$. Por outro lado, visto que $(X, \mathcal{T}')$ é compacto, então é possível extrair de $\mathcal{A}$ uma subcobertura finita de X. Portanto, $(X, \mathcal{T})$ é compacto. □

A propriedade que se segue, é um resultado importante porque é possível trabalharmos com coberturas onde os abertos dessa não são interseções com o espaço todo (topologia induzida), mas sim do espaço em que este conjunto está contido.

Proposição 5.7. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$.*
Y é compacto (em relação à topologia induzida) se e só se de toda a cobertura de Y com abertos de X se pode extrair uma subcobertura finita de Y.

Proposição 5.8. *A união finita de compactos é um compacto.*

Demonstração. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços compactos e consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ de $X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Em particular, $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de X_1.
Como, por hipótese, X_1 é compacto vai existir uma subcobertura finita de X_1, tal que

$$\exists \mathcal{A}^1 = \{A_1, \ldots, A_{k_1}\} \subset \mathcal{A} : X_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} A_i = A.$$

Da mesma forma, existem $\mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^n$ subcoberturas finitas de cada X_i, com $i = \{2, \ldots, n\}$. Ou seja,

$$\exists\, \mathcal{A}^2 = \{B_1, \ldots, B_{k_2}\} \subset \mathcal{A} : X_2 \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} B_i = B,$$

$$\vdots$$

$$\exists\, \mathcal{A}^n = \{W_1, \ldots, W_{k_n}\} \subset \mathcal{A} : X_n \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} W_i = W.$$

Então,

$$X_1 \cup \cdots \cup X_n \subset A \cup B \cup \cdots \cup W \text{ e } \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}^n \subset \mathcal{A},$$

porque a reunião finita de subcoberturas finitas, é uma subcobertura finita dos espaço compactos X_i, logo $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ é compacto. □

Com alguns exemplo feitos, passemos às demonstrações de alguns teoremas gerais que nos mostram como construir novos espaços compactos.

Proposição 5.9. *Sejam X um espaço topológico compacto e $F \subset X$ fechado.*
Então F é compacto.

A próxima proposição é interessante, porque vai relacionar espaços de Hausdorf com espaços compactos. Durante a demonstração da proposição 5.10 vamos deparar-nos com uma cobertura aberta de uniões de abertos e uma outra com interseções de forma a que essas coberturas cubram espaços disjuntas.

Proposição 5.10. *Se X é um espaço topológico de Hausdorff e $Y \subset X$ é compacto, então Y é fechado.*

Demonstração. Para demonstrar esta proposição, vamos provar que $X \backslash Y$ é aberto em vez de Y ser fechado.
Vamos considerar que $Y \neq X$ e $Y \neq \emptyset$, para podermos assim fixar um $x_0 \in X \backslash Y$ e considerarmos

todos os $y \in Y$. Pelo facto de X ser um espaço de Hausdorff, existem abertos U_y e V_y tais que $x_0 \in U_y$, $y \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$.
Sendo assim, temos que $\{V_y : y \in Y\}$ é uma cobertura de Y com conjuntos abertos de X. Como por hipótese, Y é compacto, vai existir uma subcobertura finita:

$$Y \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} = V \text{ (para simplificar).}$$

Vamos considerar os U_i que correspondem aos V_i, e assim, tomar que $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$.

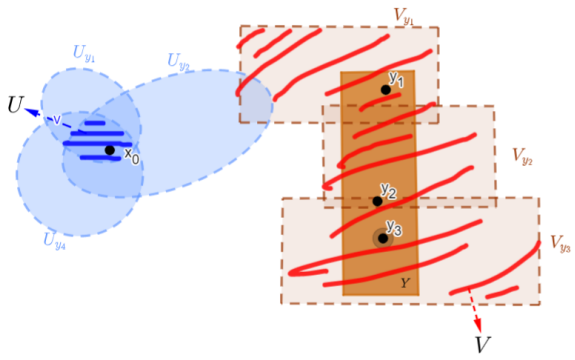


Figura 5.2: Abertos U e V (*Topology, de James R. Munkres* [1])).

.

A figura 5.2 mostra que estes dois, U e V, são disjuntos, ou seja:

$$\forall y \in Y, \exists\, i = \{1, \ldots, n\} : \; y \in V_{y_i} \wedge x_0 \in U_{y_i} \wedge V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset.$$

Como $U \subset U_{y_i}$ então

$$V_{y_i} \cap U = \emptyset \implies Y \cap U = \emptyset.$$

Ora, como $U \subset X$ aberto, por ser a interseção finita de abertos, então

$$\begin{aligned} x_0 \in U \; e \; U \subset X \backslash Y & \\ & \implies X \backslash Y \text{ é aberto} \\ & \implies Y \text{ é fechado} \end{aligned}$$

□

Esta demonstração é de facto interessante e podemos ainda concluir o seguinte:

1. Se X é um espaço topológico de Hausdorff e $Y \subset X$ e compacto, então $\forall x_0 \in X \backslash Y$ existem abertos U e V disjuntos, tais que $x_0 \in U$ e $Y \subset V$.

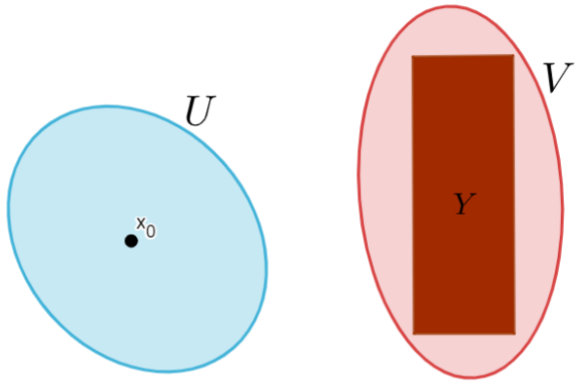


Figura 5.3: Abertos U e V disjuntos.

2. Se X é um espaço topológico de Hausdorff e $Y, Z \subset X$ são dois compactos, tais que $Y \cap Z = \emptyset$, então existem abertos U e V disjuntos tais que $Y \subset U$ e $Z \subset V$.

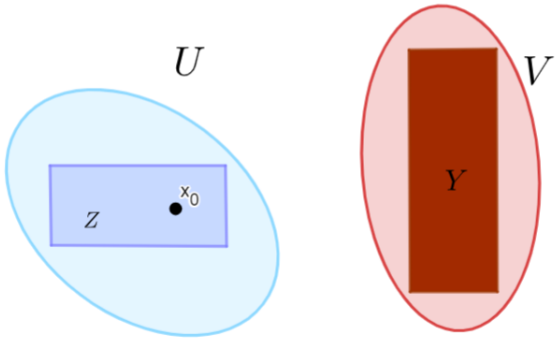


Figura 5.4: Abertos disjuntos U e V que contêm os espaços Z e Y, respetivamente.

.

Teorema 5.11. *Seja X um espaço topológico compacto e $f : X \to Y$ um função contínua. Então $f(X)$ é compacto.*

Corolário 5.12. *Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então X é compacto se e só se Y for compacto.*

Segue-se um exemplo que mostrar o facto da imagem inversa de um compacto não ser sempre compacto.

Exemplo 5.13. *Tomemos X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f satisfaz a propriedade (P) se*

(P) para cada compacto K de Y, $f^{-1}(K)$ é um compacto em X.

Apresentemos dois exemplos de funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que um satisfaz a propriedade (P) e outro que não satisfaça a propriedade (P).
Comecemos por apresentar um exemplo que satisfaça (P).
Comecemos por observar que caso estejamos nas condições do corolário 5.12, isto é, caso tenhamos um homeomofismo, a propriedade (P) é sempre verdadeira.
Considerando a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, $\forall x \in X$, e o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (a propriedade, 5.16, que veremos adiante, garante que $[a, b]$ é compacto) conseguimos determinar que $f^{-1}([a, b]) = [a, b]$ é compacto, porque f é um homeomorfismo.

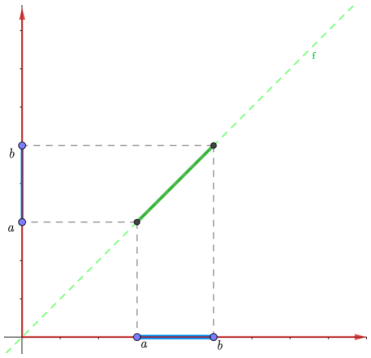


Figura 5.5: Função f com o intervalo compacto $[a, b]$.

Passemos para o exemplo de uma função $f : X \to Y$ que não vai satisfazer a propriedade (P).
Para este exemplo, temos de ter um intervalo compacto no contradomínio e ao calcularmos a imagem inversa, acabamos por obter um conjunto não compacto.
Vamos considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$ e o intervalo compacto $[-2, 2]$ do contradomínio.

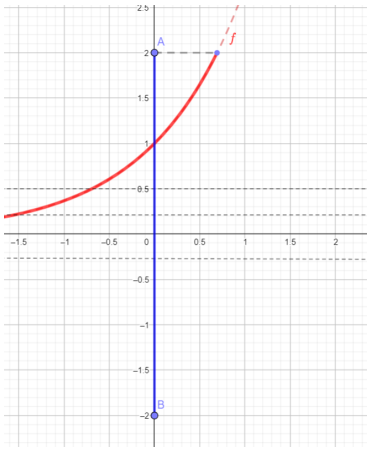


Figura 5.6: Gráfico da função f com o intervalo escolhido.

Ao determinarmos a imagem inversa obtemos:

$$f^{-1}([-2, 2]) =]-\infty, \ln(2)]$$

Ora, como apenas nos interessa a parte está no domínio da função f, então percebemos que $]-\infty, \ln(2)]$ não é compacto pois não é limitado.

De seguida, temos uma proposição referente a termos um espaço separado (ou de Hausdorff) e compacto, as topologias desse espaço ou são iguais ou não são comparáveis.

Proposição 5.14. *Seja X é um espaço compacto e de Hausdorff para as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, então ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ ou as duas topologias não são comparáveis.*

Demonstração. Como nota, antes de demonstrarmos a afirmação, reparemos que caso as topologias não sejam iguais então essas são não comparáveis, e por isso, irémos supor que as topologias são comparáveis, ou seja, vamos assumir que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
Prosseguindo, suponhamos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ e com isto, mostremos que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
Consideremos o conjunto F, que é o complementar do aberto $U \in \mathcal{T}'$, ou seja $F = X \backslash U$.
Portanto, F é fechado na topologia $\mathcal{T}'$, e deste ponto, queremos mostrar que F também vai ser um fechado na topologia $\mathcal{T}$.
Ora, como estamos nas condições das propriedade 5.9, isto é, X é compacto e F é fechado, então sabemos que F também vai ser compacto.
Tenhamos agora em conta, a função identidade $i : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$. Como é contínua, porque $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ (proposição 2.49), ao aplicarmos em F a imagem direta de i, pelo teorema 5.11, $i(F) = F$ vai ser compacto na topologia $\mathcal{T}$.
Por fim, ao aplicarmos a propriedade 5.10, onde $F \subset X$ é compacto e X um espaço de Hausdorff, concluimos que F é fechado na topologia $\mathcal{T}$, o que implica que $U = X \backslash F$ é aberto em $\mathcal{T}$.
Logo $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Provando que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

□

Exemplo 5.15. *Consideremos o espaço $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ do exemplo 5.5, que é compacto, e $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*
Sendo $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{\overline{\mathbb{N}} \backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}$, vamos mostrar que:

1. *$\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$ é uma topologia.*
2. *Os espaços $\overline{\mathbb{N}}$ e X são homeomorfos.*
3. *Sendo X compacto, então $\overline{\mathbb{N}}$ também é compacto.*

Demonstração.

1. Para mostrar que $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$ é uma topolgia, usar a definição 2.1.

   (a) Os conjuntos $\emptyset$ e $\overline{\mathbb{N}}$ pertencem à topologia $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$, porque
   - $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}} \implies \emptyset \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$
   - Tomando $F = \emptyset$, um conjunto finito, temos que

     $$\overline{\mathbb{N}} \backslash F = \overline{\mathbb{N}} \backslash \emptyset = \overline{\mathbb{N}}.$$

     Logo,

     $$\overline{\mathbb{N}} \in \{\overline{\mathbb{N}} \backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito.}\} \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}.$$

     Portanto, $\overline{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$.

(b) Para os abertos $(A_\alpha) \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$, a união de A_α tem de estar contida na topologia em causa. Os abertos da coleção (A_α) podem ser de três tipos de abertos, isto é, ou todos os elementos são abertos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ou todos de $\{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}$, ou podem até ser de ambos. Sendo assim, vamos provar que $\bigcup_\alpha A_\alpha$ está em $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$ para estes três casos:

- Se para qualquer α, A_α pertencer a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, então

$$\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}.$$

  Portanto, $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$.

- No caso de $\forall\alpha\ A_\alpha \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}$, então

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha \overline{\mathbb{N}}\backslash F$$
$$\implies \bigcup_\alpha A_\alpha = \overline{\mathbb{N}}\backslash \bigcap_\alpha F_\alpha$$

  Ora, como $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é finita, porque $\forall_\alpha \bigcap_\alpha F_\alpha \subset F_\alpha$. Então

$$\bigcup_\alpha A_\alpha \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\} \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}} \implies \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$$

- Sejam $(A_\alpha)_\alpha \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$. Suponhamos que

$$(A_\alpha)_\alpha = (A_{\alpha_1})_{\alpha_1} \cup (A_{\alpha_2})_{\alpha_2},$$

  onde, $\forall_{\alpha_1}\ A_{\alpha_1} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\forall_{\alpha_2}\ A_{\alpha_2} \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}$.
  Como vimos pelos pontos anteoriores, a união desses abertos pertencem a $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$, isto é,

$$A_1 = \bigcup_{\alpha_1} A_{\alpha_1} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge A_2 = \bigcup_{\alpha_2} A_{\alpha_2} = \overline{\mathbb{N}}\backslash F_2 \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}.$$

  Onde, $F_2 = \bigcap_{\alpha_2} F_{\alpha_2}$ e finito. Assim, este caso, resume-se a

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = A_1 \cup A_2.$$

  Esta união vai pertencer ao conjunto $\{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}$ porque tomando F_a tal que

$$F_a = F_2\backslash A_1 \subset F_2 \implies F_\alpha \text{ é finito.}$$

  Então,

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \overline{\mathbb{N}}\backslash F_a \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\} \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$$

  Portanto, $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$.

(c) Vejamos agora, se a interseção finita de elementos de $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$ pertence à topologia em causa.
Mais uma vez, vamos ter os mesmos três casos que o ponto anterior.

- Caso $\forall_{i=\{1,\dots,n\}} A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$$

- Se $\forall_{i=\{1,\dots,n\}} A_i \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}$, então $A_i = \overline{\mathbb{N}}\backslash F_i$, e assim,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathbb{N}}\backslash F_i = \overline{\mathbb{N}}\backslash \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

  Como estamos a fazer a união finita de conjuntos finitos, temos que $F_I = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é finito. Portanto,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\mathbb{N}}\backslash F_I \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\} \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}.$$

  Logo, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$.
- Sejam $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$. Vamos supor que existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a + b = n$ e que

$$A_1, \dots, A_a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge A_{a+1}, \dots, A_b \in \{\overline{\mathbb{N}}\backslash F : F \subset \mathbb{N} \wedge F \text{ é finito}\}.$$

  Pelos pontos anteriores, podemos afirmar que

$$A_\alpha = \bigcap_{i=1}^{a} A_i \wedge A_\beta = \bigcap_{i=(a+1)}^{b} A_i.$$

  Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_\alpha \cap A_\beta$. Esta interseção, vai resumir-se à diferença do conjunto A_α com o conjunto finito $F_\beta = \overline{\mathbb{N}}\backslash A_\beta$, isto é,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_\alpha\backslash F_\beta \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}.$$

  Concluindo assim que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$.

Com estas três propriedades verificadas, acabámos de confirmar que $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$ é uma topologia.

2. Consideremos a função $f : \overline{\mathbb{N}} \to X$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 0,\ n = \infty \end{cases}$$

Para vermos se esta função é de facto um homeomorfismo, temos de verificar a condição da bijetividade, que vai garantir a existência da função inversa (teorema 1.33).

(*Injetividade*) Sejam $m, n \in \overline{\mathbb{N}}$ e $m \neq n$. Consideremos que $m \in \mathbb{N}$ e que $n \in \mathbb{N} \vee n \in \{\infty\}$.
Ora, no caso de $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(m) = \frac{1}{m} \wedge f(n) = \frac{1}{n} \implies f(m) \neq f(n).$$

No outro caso, para $n \in \mathbb{N}$ e $m = \infty$ tem-se que

$$f(m) = \frac{1}{m} \wedge f(n) = 0 \implies f(m) \neq f(n).$$

Portanto, sendo $m \neq n$ então $f(m) \neq f(n)$.

(*Sobrejetividade*) Seja $n \in X$.
Se $n = 0$, vai existir um $m \in \overline{\mathbb{N}}$ tal que

$$m \in \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{N}} \implies f(m) = n.$$

Por outro lado, se $n \neq 0$ então vai existir um $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m = \frac{1}{n} \in \mathbb{N} \implies f(m) = n.$$

Portanto, esta função é sobrejetiva.

Com a injetividade e a sobrejetividade verificada, podemos afirmar que f é bijetiva e que f^{-1} existe.
Passemos à analise da continuidade:

(f *é contínua*) "$\forall V \in \mathcal{T}_X \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$".

Seja $V \in \mathcal{T}_X$, tal que $0 \notin V$. Assim, vai existir um aberto $U \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}}$ tal que

$$f^{-1}(V) = U.$$

Se considerarmos que $V \in \mathcal{T}_X$, onde $0 \in V$, então

$$\exists_{U \in \{\overline{\mathbb{N}} \setminus F : F \ \ finito \wedge F \subset \mathbb{N}\}} : f^{-1}(V) = U.$$

E assim, mostrámos que f é contínua.

(f^{-1} *é contínua*) "$\forall U \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{N}}} \implies f(U) \in \mathcal{T}_X$".
Para mostrar que $f^{-1} : X \to \overline{\mathbb{N}}$ é contínua, vamos começar por observar que a topologia induzida em $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ por $\mathbb{R}$ é a seguinte coleção:

$$\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(X \setminus \{0\}) \cup \{X \setminus E : E \ \ finito \ \wedge E \subset \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

Ora, seja U um aberto de $\overline{\mathbb{N}}$.
Se $\infty \notin U$ então $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{P}(X\backslash\{0\}) \subset \mathcal{T}_X$.
Por outro lado, se $\infty \in U$ então existe $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que $U = \overline{\mathbb{N}}\backslash F$. Portanto,

$$(f^{-1})^{-1}(U) = X\backslash(f^{-1})^{-1}(F).$$

Visto que $(f^{-1})^{-1}(F) \subset X\backslash\{0\}$ e é finito, então podemos concluir que $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.
Concluindo assim, que f^{-1} é uma função contínua.

Como todas as propridades e condições foram confirmadas, podemos assumir que a função f escolhida é de facto um homeomorfismo.

3. Esta afirmação é verdadeira, porque sabemos que o espaço X é compacto e, pela alinea 2, determinámos um homeomorfismo $f : \overline{\mathbb{N}} \to X$. Portanto, podemos usar o corolário 5.12 para concluir que $\overline{\mathbb{N}}$ é compacto.

□

Seguem-se alguns resultados clássicos juntamente com as suas demonstrações, onde a proposição 5.16 é refere-se ao facto de um intervalo ser compacto e a proposição 5.17 é sobre o produto cartesianos de compactos é também um compacto.

Proposição 5.16. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. O intervalo $[a, b]$ é compacto.*

Demonstração. Vamos assumir, com vista a um absurdo, que $[a, b]$ não é compacto e usemos o processo de recorrência de forma a obtermos sucessões para chegarmos ao absurdo em causa.
Consideremos $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$ e c o ponto médio deste intervalo.
Ora, se não é possível extrair uma subcobertura finita de $[a, b]$, então o mesmo é verdade para $[a, c]$ ou $[c, b]$. Escolhendo um dos intervalos referidos, vamos designá-lo por $[a_1, b_1]$, e deste tomemos, mais uma vez, o seu ponto médio c_1. Com o mesmo racíocinio, sabemos que não é possível extrair uma subcobertura finita de $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$.
Assim, se fizermos este processo recursivo para n vezes, acabamos por obter uma sucessão de intervalos $[a_n, b_n]$ que não possuem ums subcobertura finita de conjuntos abertos de $\mathcal{A}$, por outras palavras

$$\cdots \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a, b].$$

Da sucessão de intervalos, sabemos que o comprimento de $[a_n, b_n]$ é $\frac{b-a}{2^n} \to 0$. Ora, isto significa que

- $(a_n)_n$ é uma sucessão monótona crescente.
- $(b_n)_n$ é uma sucessão monótona decrescente.

Onde, $(a_n)_n, (b_n)_n \subset [a, b]$.
Como toda a sucessão monótona e limítada é convergente, e também que $b_n - a_n \to 0$, então os limites destas sucessões são iguais, isto é,

$$\begin{cases} a_n \to \alpha \\ b_n \to \beta \end{cases} \quad \text{e } \alpha = \beta \text{ porque } b_n - a_n \to 0.$$

Visto que, $\alpha = \beta \subset [a,b]$ e sendo $\mathcal{A}$ uma cobertura deste mesmo conjunto, então

$$\exists\, A \in \mathcal{A},\ A \text{ é aberto} : \alpha \in A$$
$$\implies \exists\, \epsilon > 0 :]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[\subset A$$

E sendo assim, vai existir um $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq p,\ a_n, b_n \in]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$
$$\implies \forall n \geq p,\ [a_n, b_n] \subset]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[\subset A \in \mathcal{A}$$

Portanto, chegámos ao absurdo porque $[a_n, b_n]$ está contido numa subcobertura finita de abertos, neste caso no aberto A, da coleção $\mathcal{A}$.
Concluímos assim, que para toda a cobertura $\mathcal{A}$ aberta de $[a,b]$ é possível extrair uma subcobertura finita aberta, ou seja, $[a,b]$ é compacto. □

Proposição 5.17. *O produto cartesiano de um número finito de compactos é compacto.*

Demonstração. Antes de procedermos à demonstração desta proposição, vamos primeiro mostrar que, sendo X e Y espaços compactos, caso $\mathcal{N}$ seja um aberto de $X \times Y$ tal que, $\{x_o\} \times Y \subset \mathcal{N}$ então

$$\exists\, W \text{ aberto de } X :\ x_0 \in W \wedge W \times Y \subset \mathcal{N}.$$

Para entendermos o que foi escrito, vejamos a figura 5.7.

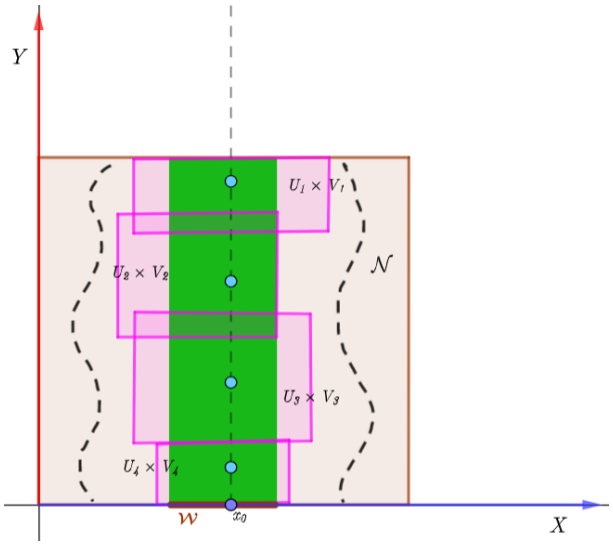


Figura 5.7: A união finita dos retângulos $U_i \times V_i$ vai conter $\{x_o\} \times Y$ e também a faixa $W \times Y$.

Comecemos por fixar um $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\} \times Y \subset \mathcal{N}$.
Notemos que, com o colorário 5.12, $\{x_0\} \times Y$ é um conjunto compacto, porque é homeomorfo ao conjunto Y.
Consideremos uma cobertura aberta de $\{x_0\} \times Y$ constituída por elementos da forma:

$$\{U \times V \subset \mathcal{N} :\ U \text{ é aberto de } X,\ V \text{ é aberto de } Y\}.$$

Como sabemos que $\{x_0\} \times Y$ é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita deste conjunto:

$$U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n \subset \mathcal{N}$$

Se tomarmos um aberto W de X, onde $W = U_1 \cap \cdots \cap U_n \ni x_0$ e observemos a figura 5.7, entendemos que os abertos $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ cobrem $\{x_0\} \times Y$, e consequentemente, cobrem $W \times Y$, porque:

$$\begin{aligned}(x,y) \in W \times Y &\implies x \in W \wedge y \in Y \\ &\implies x \in U_i \forall_i \wedge y \in V_j \text{ para algum } j = \{1, \ldots, n\} \\ &\implies \exists_j : x \in U_j \wedge y \in V_j \implies \exists_j : (x,y) \in U_j \times V_j.\end{aligned}$$

Resumindo, $W \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i \subset \mathcal{N}$, e acabando por mostrar que $W \times Y \subset \mathcal{N}$ sendo W um aberto de X que contém x_0.
Agora, passemos para a demonstração em concreto desta proposição, onde vamos utilizar o método de indução (caso para $n = 2$). Vamos mostrar que se X e Y são compactos, então $X \times Y$ é compacto.
Consideremos $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$ e seja $\{x_0\} \times Y$, com $x_0 \in X$, um espaço compacto.
Visto que $\{x_0\} \times Y \subset X \times Y$, então $\mathcal{A}$ também vai ser uma cobertura para esse conjunto, e assim é possível extrair uma subcobertura finita:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ (abertos de } X \times Y) \in \mathcal{A}.$$

Como estamos nas condições da demonstração auxiliar, podemos definir $\mathcal{N}$, como um aberto de $X \times Y$, da seguinte forma:

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset \{x_0\} \times Y$$

E sabemos também que existe um aberto em X, $W \subset X$, tal que $\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset \mathcal{N}$. Ou seja, $W \times Y$ é coberto pelos abertos $A_1, \ldots, A_n$.
Para todo o $x \in X$, vai existir um conjunto aberto $W_x \subset X$ tal que $\{x\} \times Y \subset W_x \times Y$ e $W_x \times Y$ é coberto por um numero finito de abertos de $\mathcal{A}$.
Portanto, $\mathcal{B} = \{W_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X, isto é,

$$\bigcup_{x \in X} W_x = X.$$

Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita de X com abertos $W_1, \ldots, W_k$ de $\mathcal{B}$, isto é,

$$\bigcup_{i=1}^{k} W_i = X.$$

Visto que, para cada $W_i \times Y$ é coberta por um número finito de abertos de $\mathcal{A}$, então

$$X \times Y = W_1 \times Y \cup \cdots \cup W_k \times Y$$

também vai ser coberto por um número finito de abertos de $\mathcal{A}$. Logo $X \times Y$ é compacto. □

O teorema que se segue, vai de encontro ao que foi escrito na introdução desta secção. Refere-se ao espaço em $\mathbb{R}^n$ ser compacto se e só se for fechado e limitado, e para mostrar esta afirmação vamos usar as duas proposições anteriores.

Teorema 5.18. *Em $\mathbb{R}^n$, um conjunto é compacto se e só se for fechado e limitado.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Uma propriedade de $\mathbb{R}^n$ interessante e, neste caso, útil é o facto de ser um espaço de Hausdorff e se tivermos $F \subset \mathbb{R}^n$ compacto sabemos, pela propriedade 5.10 que F é fechado. Ora, a primeira parte da implicação já foi demonstrada, por isso vamos mostrar a parte referente a ser limitado.
Note-se que $F \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B(0,m)$, sendo $B(0,m)$ bolas abertas e sabemos que $\{B(0,m) : m \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de F porque F é uma cobertura de $\mathbb{R}^n$. Como F é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita:

$$F \subset B(0,m_1) \cup \cdots \cup B(0,m_n) = B(0,M),$$

com $M = \max(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.
Portanto,

$$F \subset B(0,M) \implies F \text{ é limitado.}$$

($\Longleftarrow$) Consideremos $F \subset [-\lambda,\lambda]^n$. Pelas proposições, 5.16 e 5.17, sabemos que $[-\lambda,\lambda]^n$ é compacto, e se usarmos a propriedade 5.9, podemos concluir que F é um conjunto compacto.

□

É possível mostrar que o teorema anterior é verdadeiro em qualquer espaço de dimensão finita. No entanto, o resultado já não é válido em espaços de dimensão infinita, como é ilustrado no exemplo seguinte:

Exemplo 5.19. *Seja o conjunto A definido por:*

$$A = \{(x_n)_n \subset l^2(\mathbb{R}) | \Pi_i(x_n) = 0 \text{ se } i \neq n \text{ e } \Pi_i(x_n) = 1 \text{ se } i = n\}.$$

Este conjunto é limitado e fechado, mas não é um conjunto compacto.

Vamos agora apresentar dois resultados clássicos: o teorema de Weierstrass e o teorema da continuidade uniforme de funções contínuas definidas num compacto. Entre esses dois resultados, iremos definir a propriedade de Bolzano-Weierstrass e o espaço sequencialmente compacto.

Teorema 5.20 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sejam X um espaço topológico compacto, não vazio, e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo em X*

Demonstração. Através da hipótese do teorema, podemos usar o teorema 5.11 que refere-se ao facto de X ser um espaço compacto e f contínua, então $f(X) \subset \mathbb{R}$ é compacto. E ainda outro aspeto, do que acabámos de afirmar, é que com o uso do teorema 5.18, temos que $f(X)$ é fechado e limitado, e portanto, com o axioma do supremo temos que:

- Supremo:

$$\exists \sup_{x\in X} f(x) \in f(X) \implies \sup_{x\in X} f(x) = \max_{x\in X} f(x) = \exists\, x_1 \in X : f(x_1)$$

  A primeira igualdade é verdadeira porque $f(X)$ é fechado.

- Analogamente, para o ínfimo temos:

$$\exists\, x_2 \in X : f(x_2) = \min_{x\in X} f(x) = \inf_{x\in X} f(x).$$

□

Passemos então para as definições anteriormente referidas.

Definição 5.21. *Seja X um espaço topológico.*
Dizemos que X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass se todo o conjunto infinito em X admite pelo menos um ponto de acumulação.

Definição 5.22. *Seja X um espaço topológico.*
Dizemos que X é sequencialmente compacto de toda a sucessão em X admite pelo menos uma subsucessão convergente.

Vejamos um exemplo que mostra estas definições:

Exemplo 5.23. *Seja $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto do exemplo 5.5.*
Este conjunto contém o ponto de acumulação 0 e sabemos que admite subsucessões convergentes, isto é, $(\frac{1}{n_k})k \subset (\frac{1}{n})n$, esta subsucessão também acaba por convergir para o mesmo limite que $(\frac{1}{n})_n$.
Assim, podemos concluir que X é um espaço que tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass e também é sequencialmente compacto.

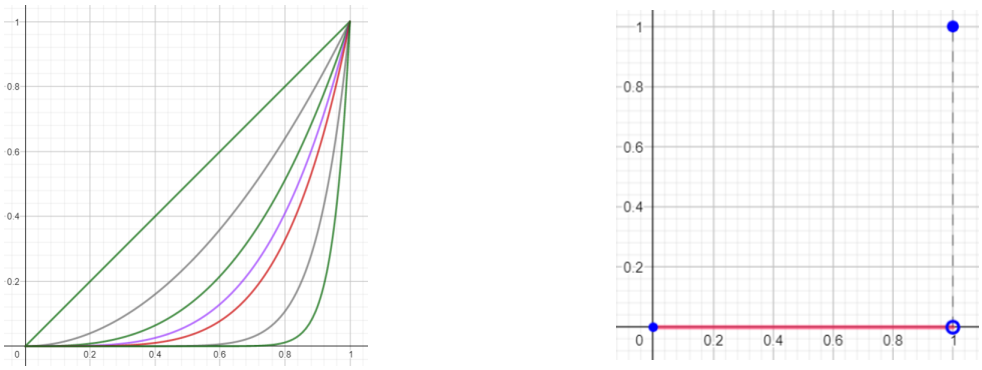
Segue-se um exemplo de um conjunto que não é sequencialmente compacto.

Exemplo 5.24. *Consideremos o conjunto $B \subset (C([0,1]), d_\infty)$, definido por*

$$B = \{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : f_n(t) = t^n\}.$$

O conjunto B não é sequêncialmente compacto.

Vejamos primeiro a figura 5.8 para perceber o conjunto B.



(a) (b)

Figura 5.8: (a) Gráficos das funções $f_n(t) = t^n$, com $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20\}$. (b) Função limite de (f_n) quando $n \to \infty$.

Como podemos observar pela figura 5.8, é possível observar que, quando $n \to \infty$, a sucessão (f_n) vai convergir na a métrica d_∞, para a $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \leq t < 1 \\ 1,\ t = 1 \end{cases}$$

Suponhamos que B é sequêncialmente compacto, ou seja, é possível extrair uma subsucessão convergente, com a métrica d_∞, isto é, a subsucessão é uniformente convergente. Tomemos assim, uma subsucessão $(y_k) \subset B$, onde $(y_k) \in C([0,1])$ tal que $y_k(t) \to y(t)$ quando $k \to \infty$. Ora, como a convergência uniforme implica a convergência pontual, então $y_k(t)$ converge pontualmente para $y(t)$, isto é,

$$\forall t \in [0,1],\ y_k(t) \to y(t) \in C([0,1]).$$

No entanto, $f_n(t)$ também converge para $f(t)$ pontualmente e sendo (y_k) uma subsucessão de B, então

$$y_k(t) \to f(t).$$

Mas $f(t) \notin C([0,1])$, chegando assim a uma contradição.
Podemos concluir assim que B não é sequencialmente compacto.

Veremos a seguir, proposição 5.27, que o conjunto B também não é compacto.

Um lema que é intersante e que vai ser usado na demonstração da propriedade5.27, é referente ao número de Lebesgue de uma cobertura. Neste lema vamos relacionar espaços sequencialmente compactos

Lema 5.25. *Seja X um espaço métrico sequencialmente compacto.*
Se $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de X, então existe um $\delta > 0$ tal que

$$\forall Y \subset X,\ diam(Y) < \delta \implies \exists\, A \in \mathcal{A} : Y \subset A$$

O número δ é chamado de número de Lebesgue da cobertura.

Dadas as definições, passemos para as duas propriedades:

Proposição 5.26. *Se X é um espaço topológico compacto, então X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Proposição 5.27. *Seja X um espaço métrico.*
São equivalentes as seguintes condições:

1) X é compacto.

2) X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.

3) X é sequencialmente compacto.

Concluímos o capítulo com um resultado clássico da Análise.

Proposição 5.28. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e X é compacto. Se a função $f : X \to Y$ for contínua, então f é uniformente contínua.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços compactos e $f : X \to Y$ uma função contínua.
Consideremos $\epsilon > 0$ e mostremos que existe um $\delta > 0$ tal que

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon.$$

Vamos tomar $\{B(y, \frac{\epsilon}{2}) : y \in Y\}$ uma cobertura aberta de Y, e como f é uma função contínua $f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))$ é aberto em X para qualquer $y \in Y$, então:

$$\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2})) = f^{-1}(\bigcup_{y \in Y} B(y, \frac{\epsilon}{2})) = f^{-1}(Y) = X. \tag{5.1.1}$$

Como nota, a primeira igualdade é verificada pela propriedade 1.26(ii) e a segunda é pelo facto de estarmo a fazer uniões de todos os elementos da cobertura de Y.
Ora, pela igualdade (5.1.1) acabámos de determinar uma cobertura aberta de X, a cobertura $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2})) : y \in Y\}$.
Pelo facto de X ser compacto e de ser um espaço métrico, podemos usar a proposição 5.27 e assim estamos das condições de dizer que existe um $\delta > 0$ (número de Lebesgue para a cobertura $\mathcal{A}$) tal que

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ d_X(x_1, x_2) < \delta \implies diam\{x_1, x_2\} < \delta,$$

e o lema 5.25 garante que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\{x_1, x_2\} \subset A = f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))$ para algum y, mas isso significa que

$$\begin{aligned} & x_1 \in f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2})) \wedge x_2 \in f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2})) \\ \implies & f(x_1) \in B(y, \frac{\epsilon}{2}) \wedge f(x_2) \in B(y, \frac{\epsilon}{2}) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

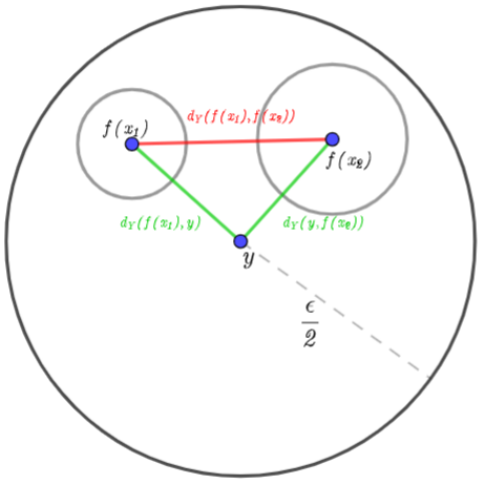


Figura 5.9: Interpretação da equação 5.1, com o objetivo de provar que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

Portanto, pela figura 5.9 podemos calcular $d_Y(f(x_1), f(x_2))$ através da desigualdade triângular, porque Y é um espaço métrico.

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_1), f(x_2)) &\leq d(f(x_1), y) + d(y, f(x_2)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, mostrámos que f é uniformente contínua. □

Capítulo 6

Espaços Vetoriais e Espaços Normados

Nesta capítulo, iremos abordar dois tipos de espaços: Espaços Vetoriais e Espaços Normados. Os espaços vetoriais servem de introdução para a secção seguinte, por serem referidos certos conceitos, propriedades e teoremas como o conceito de combinação linear, independência linear, base e a própria definição de espaço vetorial.
Na secção seguinte, iremos abordar os espaços de *Banach* (espaços completos munidos por uma norma) e daqui vamos perceber o impacto de diferentes normas na convergência de sucessões. Também falaremos de *operadores lineares*, em particular, de *funcionais*, que são operadores lineares com o conjunto de chegada igual ao espaço $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Espaços vetoriais

Comecemos com a definição de espaço vetorial, bem como algumas propriedade existentes em corpos.

Definição 6.1. *Chamamos espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) a todo o conjunto não vazio X munido de uma operação de adição, que a cada par $(x, y) \in X \times X$ associa um elemento de X designado por $x + y$, e de uma operação de multiplicação por um escalar, que a cada par $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$ associa um elemento de X designado por αx, que verifica as seguintes propriedades:*

i) (Comutatividade) $\forall_{x,y\in X}: \quad x + y = y + x$

ii) (Associatividade) $\forall_{x,y,z\in X}: \quad x + (y + z) = (x + y) + z$

iii) (Elemento neutro, adição) $\exists_{0\in X}: \quad \forall_{x\in X}\ x + 0 = x$

vi) (Elemento simétrico, adição) $\forall_{x\in X} \quad \exists_{(-x)\in X} : x + (-x) = 0$

Além disso, $\forall_{x,y\in X}$ *e* $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}$*:*

v) (Associatividade) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

vi) (Elemento neutro, multiplicação) $\exists_{1\in\mathbb{K}} : 1\ x = x$

vii) (Distributividade, de $\mathbb{K}$) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

viii) (Distributividade, de X) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Exemplos de espaços vetoriais:

Exemplo 6.2. *O espaço $\mathbb{R}^N$ com as operações usuais, soma de vetores e multiplicação por um escalar é um espaço vetorial.*

Exemplo 6.3. *O conjunto de todas as sucessões em $\mathbb{R}$ também é um espaço vetorial.*
Sejam $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Com, as operações usuais definidas do seguinte modo:

- $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$
- $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$

é possível mostrar que este conjunto é um espaço vetorial.

Uma definição muito usual é a de subespaço vetorial, onde temos um subconjuntos que tem as mesmas propriedade que o conjunto principal.

Definição 6.4. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja Y um subconjunto não vazio de X.*
Dizemos que Y é um subespaço vetorial de X se

$$\forall x, y \in Y \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha x + \beta y \in Y.$$

Exemplo 6.5. *Para exemplificar a definição 6.4, consideremos o espaço vetorial dos polinómios de grau um: $X = \{a_0 + a_1 x : a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$.*
O conjunto $X_1 = \{a_0 + a_1 x \in X : a_0 = a_1\}$ é um subespaço vetorial de X.

Definição 6.6. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam $x_1, \ldots, x_n$ $\underline{n}$ vetores de um espaço vetorial de X.*
Chamamos $\underline{\text{combinação linear}}$ dos vetores $x_1, \ldots, x_n$ a todo o vetor da forma:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \text{ com } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Definição 6.7. *Seja M um subconjunto não vazio de X, chamamos $\underline{\text{subespaço vetorial de } X \text{ gerado por } M}$, que designamos por $\underline{\text{span } M}$, ao conjunto de todas as combinações linerares de elementos de M.*

Definição 6.8. *Seja X um espaço vetorial e M um subconjunto não vazio de X.*
Dizemos que M é linearmente independente se e só se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x_1, \ldots, x_n \in M \; e \; \forall \alpha_1 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Definição 6.9. *Dizemos que M é linearmene dependente se M não for linearmente independente (l.i.).*
Por outras palavras, suponhamos que M é linearmente dependente, isto é,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p = 0 \wedge \alpha_p \neq 0.$$

Então,

$$x_p = -\frac{1}{\alpha_p}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{p-1} x_{p-1})$$

Definição 6.10. *Chamamos base (ou base de Hamel) do espaço vetorial X a todo o subconjunto, não vazio, linearmente independente de X tal que*

$$spanB = X.$$

Exemplo 6.11. *Seja o conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, onde $\forall_{j\in\{0,\ldots,n\}}\ x_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidos por*

$$x_j(t) = \begin{cases} 1, j = 0 \\ t^j, 1 \leq j \leq n \end{cases} .$$

Este conjunto é linearmente independente no espaço de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Vejamos agora a demonstração desta afirmação:
Vamos usar o processo de indução matemática para mostrar que para quaisquer $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ \alpha_0 1 + \alpha_1 t, \ldots, \alpha_n t^n = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

- *Suponhamos que $n = 0$, temos assim que*

$$\alpha_0 . 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = 0.$$

- *Suponhamos que para um certo natural k,*

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

  Mostremos agora, que esta implicação é verificada para o natural $k+1$. isto é, mostremos que

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{k+1} t^{k+1} = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{k+1} = 0.$$

  Seja $\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{k+1} t^{k+1} = 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.
  Em particular, tomando $t = 0$ tem-se

$$\alpha_0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \implies \alpha_0 = 0.$$

  Consideremos agora que

$$\begin{aligned} \forall_{t\in\mathbb{R}}\ \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{k+1} t^{k+1} = 0 &\implies \forall_{t\in\mathbb{R}}\ t(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k+1} t^k) = 0 \\ &\implies \forall_{t\neq 0}\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k+1} t^k = 0 \\ &\implies \alpha_0 = \cdots = \alpha_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Este conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é linearmente independente e gera o subespaço dos polinómios de grau n em $\mathbb{R}$, com dimensão $n+1$.
O conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base de Hamel do subespaço dos polinómios de grau n.

É possível mostrar que todo o espaço vetorial $X \neq \{0\}$ tem uma base (*lema de Zorn*) e que todas as bases têm a mesma cardinalidade.
Este número cardinal chama-se dimensão de X, e dizemos que X tem dimensão finita se e só se esse número for finito, caso contrário, dizemos que X é de dimensão infinita.
Convencionaremos ainda que o espaço vetorial $\{0\}$ é de dimensão finita, com dimensão zero.

6.2 Espaços normados

Definição 6.12. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$.*
Chama-se norma sobre X a toda a aplicação de X em $\mathbb{R}$, que a cada elemento $x \in X$ associa um número real, que designamos por $||x||_X$ (ou apenas $||x||$), tal que $\forall x, y \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:

i) $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definição 6.13. *Chamamos espaço normado a um espaço vetorial munido por uma norma.*

Proposição 6.14 (Todo o espaço normado é um espaço métrico)**.** *Seja X um espaço normado e seja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ a função definida por $d(x, y) = ||x - y||$.*
A função d é uma métrica.

Demonstração. Para a função d ser uma métrica em X, esta função tem de satisfazer as condições da definição 3.1.

i) A primeira condição, $\forall x, y \in X d(x, y) \geq 0$, é verificada devido à própria definição de norma ($1^{\underline{a}}$ condição de norma). Ou seja,

$$d(x, y) = ||x - y|| \geq 0.$$

ii) Condição de $\forall x, y \in X d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Ora, sendo $d(x, y) = 0$, temos que $||x - y|| = 0$. Portanto, mais uma vez pela definição de norma:

$$x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

iii) $\forall x, y \in X d(x, y) = d(y, x)$.
Como temos $d(x, y) = ||x - y||$ temos que

$$|| - (y - x)|| = | - 1| \, ||y - x|| = ||y - x|| = d(y, x).$$

iv) $\forall x, y, z \in X d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

$$d(x, y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \leq |||x-z||+||z-y|| = d(x, z)+d(z, y)$$

□

Definindo a distância desta forma, as bolas abertas $B_d(a, \delta) = \{x \in X : d(x, a) < \delta\}$, podem ser reescritas do seguinte modo:

$$B_d(a, \delta) = \{x \in X : ||x - a|| < \delta\}.$$

Proposição 6.15. *Seja X um espaço normado. A função $x \mapsto ||x||$ é de Lipschitz contínua.*

Demonstração. Para a função ser Lipschitz contínua, tem de existir $C > 0$ tal que

$$\forall x, y \in X \; d_Y(||x||, ||y||) \leq C \; d_X(x, y).$$

Não esqueçamos de que $\|.\| : X \to \mathbb{R}$, portanto

$$d_{\mathbb{R}}(||x||, ||y||) = \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \tag{6.2.1}$$

Mas antes de passarmos para a demonstração, mostremos primeiro que $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$.

$$\begin{cases} \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad (1) \\ \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \quad (2) \end{cases}$$

Ora, tomando a condição (2):

$$-(\|x\| - \|y|) \leq \|x - y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y| \geq -\|x - y\| \tag{6.2.2}$$

Assim, ao juntarmos à inequação 6.2.2 a condição (1), concluímos que

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \Leftrightarrow \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

Com isto, podemos prosseguir com a demonstração.
Mostremos que existe $C > 0$ tal que

$$\forall x, y \in X \; d_{\mathbb{R}}(||x||, ||y||) \leq C \; d_X(x, y)$$

Como vimos na equação 6.2.1, o que era a distância em $\mathbb{R}$, podemos dizer que

$$\forall x, y \in X \; \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq C\|x - y\|.$$

Portanto, se considerarmos $C = 1$ obtemos o resultado anteriormente verificado.
Conclusão a função é de facto Lipschitz contínua. □

Proposição 6.16. *Seja X um espaço normado e seja $d : X \to \mathbb{R}$ a métrica definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Então, para quaisquer $x, y, x, \in X$ tem-se:

i) (Invariância de translações) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

ii) (Proporcionalidade das distâncias) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x.y)$.

Vejamos agora um exemplo que vai usar a métrica discreta e mostrar que essa distância não é induzida por uma norma.

Exemplo 6.17. *Consideremos o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica discreta. Relembrando o exemplo 3.2, que define o que é a distância discreta:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \ x = y \\ 1, \ x \neq y \end{cases}$$

Esta métrica não é induzida por uma norma, $\|.\|$, em $\mathbb{R}$, isto é, não existe uma norma em $\mathbb{R}$ tal que:

$$\forall x, y \in X, \ d(x,y) = \|x - y\|.$$

Mostremos um contra-exemplo:

$$d(0,1) = 1$$
$$d(0,2) = 1$$

Ora, este exemplo mostra que não existe uma norma em $\mathbb{R}$ que induza a métrica discreta.

Exemplo 6.18. *Mostremos que $\forall p, q \in [1, +\infty[$*

$$p \leq q \implies \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$$

($\ell^p \subset \ell^q$) Relembrado a definição de espaço ℓ^p, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} |x_n|^p = 0 \implies |x_n| \to 0.$$

Assim, ao usarmos a definição de convergência, para uma sucessão $(x_n) \in \ell^p$, com $\epsilon = 1$, temos

$$\exists_{m\in\mathbb{N}} : n \geq m \implies |x_n| < 1.$$

Visto que $p \leq q$, então as sucessões de ℓ^q convergem mais rápido do que as de ℓ^p, ou seja, para a mesma sucessão $(x_n) \in \ell^p$ temos que

$$\begin{aligned} \forall n \geq m &\implies 0 \leq |x_n|^q \leq |x_n|^p \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) também é uma sucessão convergente em ℓ^q, logo $\ell^p \subset \ell^q$.

($\ell^q \subset \ell^\infty$) Consideremos $(x_n) \in \ell^q$, ou seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^q < \infty.$$

Então os termos da sucessão tendem para 0, isto é,

$$|x_n|^q \to 0 \implies |x_n| \to 0 \implies x_n \to 0.$$

Portanto, pelos teoremas 3.38 e 3.37, sabemos que (x_n) é limitada. Logo,

$$(x_n) \in \ell^\infty \implies \ell^q \subset \ell^\infty.$$

Exemplo 6.19. *A sucessão (x_n) definida por $x_n = \frac{1}{n}$ não pertence a ℓ^1, mas pertence a ℓ^2.*

Comecemos por mostrar que $(x_n) \notin \ell^1$.

Recordemos que $\ell^1(\mathbb{R}) = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \text{ converge}\}$. Ora como sabemos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, então $(x_n) \notin \ell^1$.

No entanto, a sucessão em causa pertence ao conjunto

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \text{ converge}\}.$$

Porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Definição 6.20. *Chamamos espaço de Banach a todo o espaço normado completo.*

Exemplo 6.21. *No espaço ℓ^∞, o espaço das sucessões que têm um número finito de coordenadas não nulas é um subespaço de ℓ^∞ que não é um subespaço fechado, e portanto não é completo.*

Vamos separar em dois pontos:

- *Seja Y o subespaço constituído pelas sucessões com um número finito de elementos não nulos.*

  É imediato verificar que Y é um subespaço vetorial de ℓ^∞.

- *Para mostrar que este espaço Y não é fechado, vamos considerar a seguinte sucessão:*

$$(y_n) = (\alpha_j^n) = \begin{cases} \alpha_j^{(n)} = \frac{1}{j}, j \leq n \\ \alpha_j^{(n)} = 0, j > n. \end{cases} .$$

  Outra forma de escrever esta sucessão: $(y_n) = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$.
  Daqui podemos perceber que esta sucessão tende para $y = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots) \in \ell^\infty$.
  De facto,

$$\|y - y_n\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)\|_\infty = \sup\{0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

  No entanto $y \notin Y$. Portanto, Y não é fechado.

Proposição 6.22. *Num espaço de Banach, toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Exemplo 6.23. *Vejamos um exemplo de uma série absolutamente convergente, que não é convergente.*

Consideremos a sucessão $(y_n) = (\alpha_j^{(n)}) \subset Y$, com Y definido no exemplo anterior e

$$(\alpha_j^{(n)}) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, j = n \\ 0, j \neq n \end{cases} .$$

Outra forma de escrever esta sucessão:

$$(y_n) = (0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \dots)$$

Então a seguinte série é absolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|y_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = (1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots) \notin Y$$

Definição 6.24. *Seja X um espaço normado.*
As normas $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ dizem-se equivalentes se

$$\forall \alpha, \beta > 0, \ e \ \forall x \in X, \ \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

6.3 Espaços normados de dimensão finita

Lema 6.25. *Seja X um espaço normado e seja $\{x, y\}$ um subconjunto de X linearmente independente.*
Então, existe $C > 0$ tal que

$$\forall \lambda \in [0, 1] : \ \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \geq C.$$

Teorema 6.26. *Seja X um espaço normado, $n \in \mathbb{N}$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ um subconjunto de X linearmente independente.*
Então existe $C > 0$ tal que

$$\forall_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}} \ \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq C(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Demonstração. Este teorema vai ser demonstrado através da indução matemática.
No caso de $n = 1$ sabemos que é verdade porque se tomarmos $C = \|x_1\|$ acabamos por ter a definição de norma, isto é,

$$\|\alpha_1 x_1\| = |\alpha_1| \|x_1\|.$$

Vamos supor que, para um certo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq C(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{6.3.1}$$

Dada a hipótese de indução, mostremos que a desigualdade 6.3.1 é verdadeira para o natural $n+1$.

- Se algum $\alpha_j = 0$, então a hipótese de indução garante-nos que o resultado é válido. Ou seja, se considerarmos $\alpha_{n+1} = 0$, acabamos por ter a hipótese.

- Suponhamos agora que $\forall_{j=\{1,\dots,n+1\}}$, $\alpha_j \neq 0$, e assim mostremos que existe um $C > 0$ tal que

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}\| \geq C(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n + \alpha_{n+1}|).$$

Ou de forma equivalente,

$$\frac{\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}\|}{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n + \alpha_{n+1}|} \geq C$$

Vamos denotar que $S_{n+1} = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| + |\alpha_{n+1}|$, e assim temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S_{n+1}}\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}\| \geq C \\
&\implies \left\| \frac{1}{S_{n+1}}(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \frac{\alpha_{n+1}}{S_{n+1}} x_{n+1} \right\| \geq C \\
&\implies \left\| \frac{S_n}{S_{n+1}} \left(\frac{\alpha_1}{S_n} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{S_n} x_n \right) + \frac{|\alpha_{n+1}|}{S_{n+1}} \left(\frac{\alpha_{n+1}}{|\alpha_{n+1}|} x_{n+1} \right) \right\| \geq C.
\end{aligned}$$

Se tivermos em conta o lema 6.25, ao tomarmos $\lambda = \frac{S_n}{S_{n+1}}$ e $(1-\lambda) = \frac{|\alpha_{n+1}|}{S_{n+1}}$, provamos que a desigualdade 6.3.1 é verdadeira para $n+1$.

□

Teorema 6.27. *Num espaço vetorial X de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.*

Demonstração. Seja $n = dim X$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X.
Consideremos $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ duas normas em X. Vamos mostrar que existe $C > 0$ tal que para todo o $x \in X$

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2.$$

Seja $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
Então existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_2 = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\|_2 \geq C(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\|_1 \\
&\leq |\alpha_1|\|e_1\|_1 + |\alpha_2|\|e_2\|_1 + \cdots + |\alpha_n|\|e_n\|_1 \\
&\leq K(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|)
\end{aligned}$$

com $K = \max_{j=\{1,\dots,n\}} \{\|e_j\|_1\}$.

$$\|x\|_1 \leq K(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|) \leq K.\frac{1}{C}\|x\|_2 = \tilde{C}\|x\|_2.$$

De forma análoga, pode-se mostrar que existe $\bar{C} > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq \bar{C}\|x\|_1$$

□

Teorema 6.28. *Seja X um espaço normado e Y um subespaço vetorial de X com dimensão finita.*
Então Y é completo e fechado.

6.4 Operadores linerares

Definição 6.29. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : X \to Y$ uma função.*
Diz-se que T é um operador linear se:

i) $\forall_{x,y\in X}\ T(x+y) = T(x) + T(y)$.

ii) $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\ \forall_{x\in X} T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Designemos por $Ran(T)$ o contra dominio de T e por $N(T)$ o espaço nulo de T, isto é, o conjunto definido por:

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

Notemos que $T(0) = 0$, porque

$$\forall_{x\in X} T(0) = T(0x) = 0T(x) = 0$$

Apresentaremos alguns exemplos de operadores lineares:

Exemplo 6.30.

1. *Operador identidade:Seja X um espaço vetorial, não nulo, e seja o operador linear $id : X \to X$ definido por*
$$id(x) = x.$$

2. *Operador de derivação:*
Seja X o conjunto de todos os polinómios definidos no intervalo $[0, 1]$.
No conjunto X, definimos o operador $T = X \to X$ definido por:
$$Tx = x',\ \text{onde } x' \text{ desgina a função derivada de } x.$$

3. *Operador de integração:*
No conjunto das funções contínuas $C([a, b])$, definimos o operador $T : C([a, b]) \to C([a, b])$:
$$Tx(t) = \int_a^t x(\xi)\partial\xi$$

4. *Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ define um operador (linear) $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ da seguinte forma:*
$$Tx = Mx,$$
onde, $X \in \mathbb{R}^m$ tal que $x = (\alpha_j)$, com $j = \{1, \ldots, m\}$, e $Mx \in \mathbb{R}^n$ tal que $Mx = (\beta_j)$, com $j = \{1, \ldots, n\}$, designa o vetor de $\mathbb{R}^n$ que se obtem multiplicando a matriz M pelo vetor x.

Teorema 6.31. *Seja $T : X \to Y$ um operador linear.*
Então:

i) $Ran(T)$ é um subespaço vetorial de Y.

ii) $N(T)$ é um subespaço vetorial de X.

iii) Se $dim(X) = n < \infty$, então $dim(Ran(T)) \leq n$.

Teorema 6.32. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : X \to Y$ um operador linear. Então:*

i) O operador inverso $T^{-1} : Ran(T) \to X$ existe se e só se $N(T) = \{0\}$.

ii) Se T^{-1} existe, então T^{-1} é linear.

iii) Se $dim(X) = n < \infty$ e T^{-1} existir então $dim(X) = dim(Ran(T))$.

Definição 6.33 (Operador linear limitado)**.** *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear.*
Diz-se que T é limitado se existir $C > 0$ tal que

$$\forall_{x \in X}, \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Chamamos norma do operador de T e designamos por $\|T\|$, o número real assim definido:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

No caso de $X = \{0\}$, convencionaremos que $\|T\| = 0$, caso contrário, $\|T\|$ existe porque $\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\}$ é majorado devido:

$$\forall_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}}, \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq C.$$

Proposição 6.34. *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Então,*

$$\forall_{x \in X} \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

Proposição 6.35. *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Então,*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

Esta proposição vai avaliar todos $x \in X$, transformando-os num vetor unitário, isto é, $\frac{x}{\|x\|}$. Portanto, podemos definir a norma de um operador linear através de vetores unitários.

Proposição 6.36. *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Então, a função $\|.\| : \mathcal{B}(X, Y) \to \mathbb{R}$ é uma norma, onde $\mathcal{B}(X, Y)$ é o conjunto dos operadores lineares limitados de X em Y.*

Demonstração. Verifiquemos as condições da definição 6.12.

i) Pela definição 6.33 sabemos que a norma de um operador linear limitado é

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Ora, sabemos também que para qualquer $x \in X$ e $x \neq 0$

$$\|Tx\| \geq 0 \quad e \quad \|x\| > 0.$$

Portanto, $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0$ para qualquer $x \neq 0$. Logo,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0.$$

Mostremos agora que $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Para o caso de $T = 0$ temos que

$$\forall_{x \in X}\ Tx = 0 \implies \|Tx\| = 0.$$

Logo,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0.$$

$(\Longrightarrow)$ Para o recíproco, tendo $\|T\| = 0$ temos que $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$. Ora, para todo o $x \in X$ e $x \neq 0$,

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \forall_{x \neq 0}\ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0 &\implies \forall_{x \neq 0}\ \|Tx\| = 0 \\ &\implies \forall_{x \neq 0}\ Tx = 0 \implies T = 0 \end{aligned}$$

ii) Mostremos que $\|\alpha Tx\| = |\alpha|\|T\|$.

$$\|\alpha T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(\alpha T)x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|\alpha Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} |\alpha| \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\alpha|\|T\|.$$

iii) Sejam T e S operadores lineares limitados do conjunto$\mathcal{B}(X, Y)$. Mostremos que $\|T + S\| = \|T\| + \|S\|$.

$$\begin{aligned} \|T + S\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(T + S)x\|}{\|x\|} &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx + Sx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|Tx\| + \|Sx\|}{\|x\|} \right) = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|} + \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \right) \end{aligned}$$

Ao usarmos as propriedades do supremo, temos que

$$\begin{aligned} \|T + S\| &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \\ &= \|T\| + \|S\| \end{aligned}$$

□

Vejamos agora se os operadores lineares do exemplo 6.30 são ou não limitados, e para isso temos de usar a definição 6.33.

Exemplo 6.37.

1. *(identidade) O operador identidade definido no exemplo 6.30.1. é limitado porque:*

$$\|id\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|idx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

2. *(operador de derivação) Seja X o conjunto do polinómios definidos no intervalo $[0,1]$ e $T : X \to \mathbb{R}$ o operador linear tal que*

$$Tx = x', \text{ onde } x' \text{ designa a função derivada da função } x$$

Mostremos que T não é limitado, ou seja, $\forall_{C>0}\, \exists x \in X : \|Tx\| > C\|x\|$.

Para isso, vamos considerar a sucessão $x_n(t) = t^n$ e determinemos a norma de x_n e a norma de Tx_n:

- $\forall_{n\in\mathbb{N}},\ \|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$
- $\|Tx_n\| = \|x_n'\| = \max_{t\in[0,1]} |nt^{n-1}| = n$

Consequentemente,

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = \frac{n}{1} = n \to \infty.$$

Concluindo assim que T não é limitado.

3. *(operador de integração) Consideremos o operador $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ definido por*

$$Tx(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

onde, $k : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, $k(t,s)$ é contínua em $[a,b]\times[a,b]$. Mostremos que T é limitado, isto é, mostremos que existe $C > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Calculemos a norma deste operador:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^b k(t,s)x(s)ds\right| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)||x(s)|ds\end{aligned}$$

Pelo facto de k ser uma função contínua e do domínio ser compacto, o teorema de Weierstrass (teorema5.20) vai garantir a existência de um máximo:

$$k_0 = \max_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |k(t,s)|.$$

Portanto,

$$\|Tx\| \leq \int_a^b k_0|x(s)|ds.$$

Como para qualquer $s \in [a,b]$

$$|x(s)| \leq \max_{s\in[a,b]}|x(s)| = \|x\|.$$

Logo,

$$\|Tx\| \leq k_0\|x\|(b-a)$$

Assim, ao tomarmos o nosso $C = k_0(b-a)$*, mostramos que* T *é limitado.*

Teorema 6.38. *Sejam* X, Y *espaços normados e* $T : X \to Y$ *um operador linear.*
Se $dim(x) < \infty$ *então* T *é limitado.*

Teorema 6.39. *Sejam* X, Y *espaços normados e* $T : X \to Y$ *um operador linear. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) T *é limitado;*

ii) T *é lipschitz contínua;*

iii) T *é contínua;*

iv) T *é contínua no ponto* 0*.*

6.5 Funcionais lineares

Definição 6.40. *Chama-se funcional linear a um operador linear cujo contradomínio é o conjunto* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

Definição 6.41. *Seja* X *um espaço normado e* $f : X \to \mathbb{K}(\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *um funcional linear. Diz-se que* f *é limitado se existir um* $C > 0$ *tal que*

$$\forall_{x\in X}|f(x)| \leq C\|x\|_X.$$

Neste caso, podemos definir (a norma de f*):*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}$$

Exemplo 6.42.

1. *Seja* $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}^N$*, sendo* $a \neq 0$*, e* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *o funcional definido por* $f(x) = x \cdot a$*.*
   Vejamos que f *é um funcional linear, limitado e* $\|f\| = \|a\|$*.*

   - *f é linear:*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^N}\ f(x+y) = (x+y)\cdot a = x\cdot a + y\cdot a = f(x) + f(y).$$

- *f é limitado:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^N |f(x)| = |x \cdot a| \leq \|a\|\|x\| \text{ (desigualdade de Cauchy-Schwarz)}$$

Considerando $C = \|a\|$, podemos assim concluir que f é um funcional limitado.

- $\|f\| = \|a\|$:
Continuando o racíocinio da alínea anterior, sabemos que

$$\forall_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|.$$

Então,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|.$$

Averiguemos se existe $x_0 \in X$, não nulo, tal que

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \|a\| \Leftrightarrow \frac{\|x_0 \cdot a\|}{\|x_0\|} = \|a\|$$

Uma vez que $x \cdot x = \|x\|^2$, ao escolhermos $x_0 = a$ temos que

$$\frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Então,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x|)}{\|x\|} \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Portanto, como determinámos que $\|f\| \leq \|a\|$ e $\|f\| \geq \|a\|$, podemos afirmar que

$$\|f\| = \|a\|$$

2. *Integral definido: Seja $I : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por $I(x) = \int_a^b x(t)dt$.*
Vejamos que f é um funcional linear, limitado e $\|I\| = \|a\|$.

- *I é linear.*
- *I é limitado: Determinemos um $C > 0$ tal que*

$$|I(x)| = C\|x\|.$$

Para todo o $x \in C([a,b])$ a norma de $I(x)$ é

$$\begin{aligned} |I(x)| = \left| \int_a^b x \right| &\leq \int_a^b |x| \\ &\leq \int_a^b \max_{t \in [a,b]} |x| \\ &\leq \|x\|(b-a) \end{aligned}$$

Logo, ao tomarmos $C = (b-a)$ para todo o $x \in C([a,b])$ temos que

$$|Ix| \leq C\|x\|$$

- $\underline{\|I\| = b - a}$: *Já sabemos, pela alínea anterior, que*

$$\forall_{\substack{x \in C([a,b]) \\ x \neq 0}} \frac{|I(x)|}{\|x\|} \leq b - a.$$

Consequentemente,

$$\|I\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|I(x)\|}{\|x\|} \leq b - a.$$

Tentemos determinar $x_0 \in C([a,b])$ *tal que*

$$\frac{|I(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{|\int_a^b x_0|}{\|x_0\|} = b - a.$$

Ora, escolhendo, $x_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0(t) = 1$ *temos*

$$\left.\begin{array}{l} \|x_0\|_\infty = 1 \\ \displaystyle\int_a^b 1 = b - a \end{array}\right\} \implies \frac{|I(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{b-a}{1} = b - a.$$

Assim,

$$\|I\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} \geq \frac{|I(x_0)|}{\|x_0\|} = b - a.$$

Podemos concluir que $\|I\| = b - a$.

Bibliografia

[1] James R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, Prentice Hall, 2000

[2] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Jonh Wiley & Sons, 1989